

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

SIDNEY TIAGO DA SILVA

SISTEMAS NÃO-LINEARES DE REAÇÃO-DIFUSÃO EM PLASMAS NÃO  
MAGNÉTICOS FRACAMENTE IONIZADOS.

Curitiba  
2020

SIDNEY TIAGO DA SILVA

SISTEMAS NÃO-LINEARES DE REAÇÃO-DIFUSÃO EM PLASMAS NÃO  
MAGNÉTICOS FRACAMENTE IONIZADOS.

Tese apresentada ao curso de Pós-graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Física sob orientação do *Prof. Dr. Ricardo L. Viana*.

Curitiba  
2020

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR  
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

S586s Silva, Sidney Tiago da  
Sistemas não-lineares de reação-difusão em plasmas não magnéticos fracamente ionizados  
[recurso eletrônico] / Sidney Tiago da Silva. – Curitiba, 2020.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-  
Graduação em Física, 2020.

Orientador: Ricardo Luiz Viana.

1. Física dos plasmas. I. Universidade Federal do Paraná. II. Viana, Ricardo Luiz. III. Título.

CDD: 530.44

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1928

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **SIDNEY TIAGO DA SILVA** intitulada: **"Sistemas não-lineares de reação-difusão em plasmas não-magnéticos fracamente ionizados"**, sob orientação do Prof. Dr. RICARDO LUIZ VIANA, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 14 de Outubro de 2020.

Assinatura Eletrônica

14/10/2020 18:11:15.0

RICARDO LUIZ VIANA

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

14/10/2020 21:01:46.0

GUILHERME JEAN PEREIRA DE ABREU

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

14/10/2020 17:44:43.0

JOSÉ DANILO SZEZECH JÚNIOR

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA)

Assinatura Eletrônica

15/10/2020 15:39:53.0

FELIPE BARBEDO RIZZATO

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL )

Assinatura Eletrônica

15/10/2020 08:37:14.0

EDSON DENIS LEONEL

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE EST. PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO)



# Agradecimentos

À minha mãe e meu pai, por todo o apoio.

À minha esposa, Jacqueline, pela paciência, apoio, companheirismo e incentivo.

Ao professor Dr. Ricardo Luiz Viana, pela orientação, dedicação e paciência.

Ao grupo de pesquisa de física de plasma da Universidade Federal do Paraná, pelo auxílio.

A todos os amigos e colegas da pós-graduação.

Aos demais familiares e amigos, que mesmo não participando diretamente deste trabalho fazem tudo valer a pena.

*"Não sei de nenhum momento da história da humanidade em que a ignorância foi melhor que o conhecimento".*

---

*Neil deGrasse Tyson*

# RESUMO

A equação de reação-difusão ocorre em uma grande variedade de problemas físicos em plasmas. Um exemplo dessas aplicações ocorre em plasmas fracamente ionizados formados por uma difusão ambipolar combinada com processos de reação não linear, como ionização e recombinação. A competição entre esses efeitos conduz a uma grande variedade na dinâmica espaço-temporal. Apresentamos duas modelagens numéricas distintas para investigar um plasma unidimensional confinado por paredes condutoras. Descrevemos a formação de padrões complexos, como defeitos caóticos, intermitência espaço-temporal e caos espaço-temporal completamente desenvolvido. Técnicas numéricas são utilizadas para caracterizar tais padrões, e um diagrama de fase da dinâmica espaço-temporal é obtido para cada simulação numérica utilizada. No final desse trabalho, aplicamos uma onda estacionária externa, mostrando que a mesma suprime o caos espaço-temporal através da escolha da amplitude da onda. Esses efeitos de supressão são mostrados quantitativamente por vários diagnósticos numéricos, como os expoentes médios de Lyapunov e a função de correlação espacial. A supressão do caos espaço-temporal pode ser alcançada através de escolhas adequadas de amplitude e frequência das ondas aplicadas.

**Palavras-chave:** Equações de reação-difusão não lineares, plasmas fracamente ionizados, caos espaço-temporal

# ABSTRACT

The reaction-diffusion equation occurs in a wide variety of physical problems in plasmas. An example of these applications occurs in weakly ionized plasmas formed by an ambipolar diffusion combined with non-linear reaction processes such as ionization and recombination. The competition between these effects leads to a wide variety of spatio-temporal dynamics. We present two different numerical models to investigate a one-dimensional plasma confined by conductive walls. We describe the formation of complex patterns, such as chaotic defects, spatiotemporal intermittency and fully developed spatiotemporal chaos. Numerical techniques are used to characterize such patterns, and a phase diagram of the space-time dynamics is obtained for each numerical simulation used. At the end of this work, we applied an external standing wave, showing that it suppresses the space-time chaos by choosing the wave amplitude. These suppression effects are shown quantitatively by several numerical diagnoses, such as Lyapunov's average exponents and the spatial correlation function. The suppression of space-time chaos can be achieved through appropriate choices of amplitude and frequency of the applied waves.

**Keywords:** Nonlinear reaction-diffusion equations, Weakly ionized plasmas, Spatiotemporal chaos

# Lista de Figuras

1.1	Esquema experimental dos filamentos de orifícios caóticos no espaço $xyt$ para um sistema de plasma cilíndrico empoeirado de fraca ionização ( $n \approx 10^9 cm^{-3}$ ), gerado em um gás argônio a 220 $mTorr$ , usando um sistema de potência de 14 $MHz$ RF a 2,8W de potência RF. Fonte: (Chang e Lin I, 2013, p 5) . . . . .	21
1.2	Regiões ampliadas dos filamentos de orifícios experimentais para um sistema de plasma cilíndrico empoeirado de fraca ionização ( $n \approx 10^9 cm^{-3}$ ), gerado em um gás argônio a 220 $mTorr$ , usando um sistema de potência de 14 $MHz$ RF a 2,8W de potência RF. As setas indicam a direção em função do tempo. Fonte: (Chang e Lin I, 2013, p 5) . . . . .	22
1.3	Evolução temporal experimental da densidade $n_h$ no plano $xy$ para em um sistema de plasma cilíndrico empoeirado de fraca ionização ( $n \approx 10^9 cm^{-3}$ ), gerado em um gás argônio a 220 $mTorr$ , usando um sistema de potência de 14 $MHz$ RF a 2,8W de potência RF. Fonte: (Chang e Lin I, 2013, p 5) . . . . .	22
3.1	Adicionando um campo elétrico dentro de um plasma, através de duas esferas carregadas conectadas a uma bateria, há uma atração das partículas com a carga oposta e quase imediatamente uma nuvem de íons envolve a esfera negativa e uma nuvem de elétrons envolve a esfera positiva, produzindo um escudo em torno dessas esferas. A região fora do escudo permanece neutra. . . . .	37
3.2	Distribuição não uniforme de íons e elétrons em um fundo denso de átomos neutros. Essas partículas carregadas se difundem através de átomos neutros através de uma caminhada aleatória, colidindo frequentemente com átomos neutros. Fonte: [1] . . . . .	39
3.3	Ilustração da definição de seção transversal de choque. As bolinhas pretas representam elétrons incidindo num bloco de área $A$ e espessura $dx$ contendo $n_n$ átomos neutros por $m^3$ . Fonte: [1] . . . . .	41

3.4	Densidade do plasma variando com o tempo, onde para um tempo muito grande a densidade vai a zero. Fonte: Adaptada de [1]	45
4.1	Diagrama de fase normalizado(em escala de cores), de uma rede de mapas acoplados do tipo reação-difusão, com condições iniciais aleatórias, após um transiente de $n=10\,000$ , $N=100$ , $\beta = 0,1$ , com 200 iteradas após o transiente e condição de contorno fixas igual a zero. Para cada par de $(\alpha, \varepsilon)$ obtemos a média dos períodos da rede, mostrando a dinâmica dominante. A região I é o padrão aleatório congelado, a região II é a seleção de padrão, região III é a formação de defeitos caóticos, região IV é a intermitência espaço-temporal e por último a região V é o caos espaço-temporal completamente desenvolvido.	54
4.2	$u_n^i \times i$ com condições iniciais aleatórias e condição de contorno fixa igual a zero para 100 sítios, após transiente de 10 000 iterações, é realizado uma sobreposição de 200 iterações com acoplamento de $\varepsilon = 0,1$ e $\beta = 0,1$ , onde a densidade está normalizada no valor máximo. (a) Padrão aleatório congelado; (b) Seleção de padrão; (c) Seleção de padrão; (d) Defeitos caóticos, (d) Intermitência espaço-temporal e (f) Caos espaço-temporal completamente desenvolvido.	57
4.3	Diagrama espaço-tempo com 100 sítios para com condições iniciais aleatórias, condição de contorno fixas igual a zero , após um transiente de $n=5\,000$ , com $\varepsilon = 0,1$ e $\beta = 0,1$ , onde a densidade está normalizada no valor máximo. (a) $\alpha = 2,7$ ; (b) $\alpha = 2,8$ ; (c) $\alpha = 2,85$ ; (d) $\alpha = 2,92$ e (e) $\alpha = 2,95$	59
4.4	Espectro de Lyapunov para $\beta = 0,1$ e 100 sítios, após um transiente de $n = 10\,000$ . (a) Variamos $\alpha$ mantendo os outros parâmetros constantes. (b) Espectro de lyapunov com $\varepsilon = 0,1$ e $\alpha = 2,85$ , onde 1 se refere a um só defeito na rede e 4 refere-se a 4 defeitos na rede	60
4.5	Diagrama de densidade da entropia Kolmogorov-Sinai (em escala de cores), variando o $\alpha$ de 2,55 à 3,00 e o $\varepsilon$ de 0,0 à 0,5 com $\beta = 0,1$ e 100 sítios.	62
4.6	Gráfico da densidade do plasma ( $u$ ) em função de $\beta$ , após um transiente de $n = 10\,000$ , para $\varepsilon = 0,1$ e 100 sítios, onde a densidade está normalizada no valor máximo e em escala logarítmica.	62

4.7	(a) Série temporal do movimento de um defeito individual para $\alpha = 2,85$ , $\beta = \varepsilon = 0,1$ . (b) Número de defeitos caóticos em função do tamanho da rede para $\alpha = 2,85$ e $\varepsilon = \beta = 0,1$ . (c) Deslocamento quadrático médio dos defeitos caóticos em função do tempo para redes de mapas de $N = 6000$ com $\alpha = 2,85$ , $\beta = \varepsilon = 0,1$ . Esses dados podem ser ajustado pela expressão linear $\langle \delta^2 \rangle = 2Dn$ . (d) Coeficiente de difusão dos defeitos em função do parâmetro de não linearidade $\alpha$ com $\varepsilon = \beta = 0,1$ . Para cada valor de $\alpha$ , obtemos o coeficiente de difusão pela expressão $\langle \delta^2 \rangle = 2Dn$ . . . . .	65
5.1	Malha computacional uni-dimensional (Fonte: MELO, 2011, p.18.)	69
5.2	Malha computacional bi-dimensional (Fonte: MELO, 2011, p.18.)	69
5.3	A aproximação da derivada espacial é feita no tempo avançado $n + 1$ . . . . .	71
5.4	Gráfico comparando a solução numérica obtida pelo método de diferença finita implícita e solução exata da equação de difusão sem termo de fonte para $\varepsilon = 1,0$ , $\Delta\tau = 0,0001$ e $\Delta\rho = 0,005$ . (a) Plotamos a densidade em função do tempo. Os círculos vermelhos representam a solução numérica e a linha preta, a solução exata. (b) Representa a densidade em função de $\rho$ , onde foi comparada a solução numérica com a solução exata para dois intervalos de $\Delta\rho$ diferente. . . . .	75
5.5	Comparação entre dois métodos de Diferença finita na região caótica. (a) Método implícito (b) Método de Crank - Nicholson . . .	76
5.6	Diagrama de fases da Eq. (6.4), com a condição inicial $u(\rho, \tau = 0) = \sin(2\pi\rho)$ e condições de contorno $u(0, \tau) = u(1, \tau)$ . O período médio de tempo é plotado novamente contra o coeficiente de acoplamento $\varepsilon$ e o parâmetro de não linearidade $\alpha$ . As letras romanas maiúsculas indicam: <b>I</b> : padrões aleatórios congelados; <b>II</b> : seleção de padrões; <b>III</b> : defeitos caóticos; <b>IV</b> : intermitência espaço-temporal; <b>V</b> : caos espaço-temporal totalmente desenvolvido. . . . .	77
5.7	Gráficos espaço-temporais da densidade do plasma normalizada (em escala de cores) para $\varepsilon = 0,01$ e $\alpha/10^4 =$ (a) 2,60, (b) 2,70, (c) 2,75 e (d) 2,82. . . . .	78
5.8	Gráficos espaço-temporais da densidade do plasma normalizada (em escala de cores) para $\varepsilon = 0,01$ e $\alpha/10^4 =$ (a) 2,83, (b) 2,85. . .	79
5.9	Gráficos espaço-temporais da densidade do plasma normalizada (em escala de cores) para $\varepsilon = 0,05$ e $\alpha/10^4 =$ (a) 2,60, (b) 2,70, (c) 2,86, (d) 2,92, (e) 2,95, (f) 3,00. . . . .	80

5.10	Nessa figura comparamos os padrões espaço-temporais entre as redes de mapas acoplados e a integração numérica com os parâmetros de integração $\Delta\rho = 0,005$ e $\Delta\tau = 0,0001$ . Os resultados mostram a semelhança dos perfis espaço-temporais entre as duas simulações numéricas, respectivamente. (a) Padrão aleatório congelado para redes de mapas acoplados com $\varepsilon = 0,1$ , $\beta = 0,1$ e $\alpha = 2,65$ , overlap de 200 interações. (b) Padrão aleatório congelado para integração direta da equação de reação-difusão com $\varepsilon = 0,01$ e $\alpha = 2,65 \times 10^4$ , overlap de 200 interações. (d) Seleção de padrão para redes de mapas acoplados com $\varepsilon = 0,1$ , $\beta = 0,1$ e $\alpha = 2,75$ , overlap de 200 interações. (d) Seleção de padrão para integração direta da equação de reação-difusão com $\varepsilon = 0,01$ , $\alpha = 2,75 \times 10^4$ , overlap de 200 interações. (e) Defeito caótico para redes de mapas acoplados com $\varepsilon = 0,1$ , $\beta = 0,1$ e $\alpha = 2,85$ , overlap de 200 interações. (f) Defeito caótico para integração direta da equação de reação-difusão com $\varepsilon = 0,01$ , $\alpha = 2,81 \times 10^4$ , overlap de 200 interações. . . . .	82
5.11	Nessa figura mostramos que a mesma dinâmica encontrada nas redes de mapas acoplados é obtida quando utilizamos a integração numérica. Isso fica bem evidenciada quando comparamos o diagrama de fase entre as duas simulações, respectivamente. (a) Diagrama de fase das redes de mapas acoplados. (b) Diagrama de fase na integração numérica. . . . .	83
5.12	(a) Comprimento de onda espacial $\lambda$ em função do coeficiente de acoplamento $\varepsilon$ para $\alpha = 2,6 \times 10^4$ : Curvas pretas são estimativas numéricas e as curvas vermelhas são a estimativa teórica (5.19) (b) Estimativa numérica de $\lambda$ para dois valores diferentes de $\alpha$ . . . . .	84
5.13	Padrão aleatório congelado com $\alpha = 2,6 \times 10^4$ e $\varepsilon = 0,01$ . As regiões mais densas representam os domínios caóticos. . . . .	85
5.14	Gráfico da densidade do plasma normalizado em função de $\rho$ para a equação de reação-difusão. Amplitude $u$ com de 200 iterações, após um transiente de 10 tempos característicos. (a) $\varepsilon = 0,01$ e $\alpha = 2,65 \times 10^4$ (b) $\varepsilon = 0,01$ e $\alpha = 2,75 \times 10^4$ . . . . .	86
5.15	Expoente local de Lyapunov (em escala de cores) em função dos parâmetros de acoplamento $\varepsilon$ e não linearidade $\alpha$ . As regiões com os expoentes menores que zero são as regiões ordenadas. As regiões com os expoentes acima de zero são regiões desordenadas. . . . .	90
5.16	Movimento de um defeito individual para o par de parâmetros ( $\varepsilon = 0,01$ e $\alpha = 2,82 \times 10^4$ ) . . . . .	91



6.1	Gráficos espaço-temporais da densidade normalizada do plasma (em escala de cores) para $\varepsilon = 0,01$ , $\alpha = 2,6 \times 10^4$ and $n_0 = 0,04$ , onde uma perturbação foi aplicada em $\tau = 10$ para quatro diferentes frequências.(a) $\omega = 1$ (b) $\omega = 10$ (c) $\omega = 20$ (d) $\omega = 100$ . . .	93
6.2	Gráficos espaço-temporais da densidade normalizada do plasma (em escala de cores) para $\varepsilon = 0,01$ , $\alpha = 2,82 \times 10^4$ and $n_0 = 0,04$ , onde uma perturbação foi aplicada em $\tau = 10$ para quatro diferentes frequências.(a) $\omega = 1$ (b) $\omega = 10$ (c) $\omega = 20$ (d) $\omega = 100$ . . .	94
6.3	Gráficos espaço-temporais da densidade normalizada do plasma (em escala de cores) para $\varepsilon = 0,01$ , $\alpha = 2,83 \times 10^4$ and $n_0 = 0,04$ , onde uma perturbação foi aplicada em $\tau = 10$ para quatro diferentes frequências.(a) $\omega = 1$ (b) $\omega = 10$ (c) $\omega = 20$ (d) $\omega = 100$ . . .	95
6.4	Expoente local de Lyapunov (em escala de cores) em função dos pares de parâmetros (a) Amplitude da onda $u_0$ e não linearidade $\alpha$ para $\omega = 10$ (b) frequência da onda $\omega$ e não linearidade $\alpha$ para $u_0 = 0,04$ . . . . .	98
6.5	Expoente local de Lyapunov $\Lambda$ versus $\omega$ para $u_0 = 0,02$ (curvas em preto), $u_0 = 0,04$ (curvas em vermelho) e $u_0 = 0,08$ (curvas em azul) para (a) $\alpha = 26\,000$ e $\varepsilon = 0,01$ ; (b) $\alpha = 28\,200$ e $\varepsilon = 0,01$ ; (c) $\alpha = 28\,300$ e $\varepsilon = 0,01$ . . . . .	99
6.6	Função de correlação espacial em função da separação da rede em tempo fixo $\tau = 10$ , $\varepsilon = 0,01$ and $\omega = 10$ . (a) $\alpha = 26\,000$ , (b) $\alpha = 28\,200$ e (c) $\alpha = 28\,300$ . . . . .	100
6.7	Função de correlação espacial em função da separação da rede em tempo fixo $\tau = 10$ , $\varepsilon = 0,01$ and $\omega = 10$ com $\alpha = 30\,000$ para curva vermelha( $u_0 = 0$ ), curva azul( $u_0 = 0,001$ ) e curva verde ( $u_0 = 0,0015$ ) . . . . .	102

# Lista de Tabelas

2.1	Hierarquia de sistemas dinâmicos espacialmente estendidos	27
6.1	Coeficientes da função ajustada em função da amplitude da perturbação para diferentes valores de $\alpha$ . . . . .	102
6.2	Coeficientes da função exponencial ajustada em função da amplitude da perturbação para diferentes valores de $\alpha$ . . . .	103

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>Mapas acoplados</b>	<b>26</b>
2.1	Mapas acoplados . . . . .	26
2.1.1	Conceitos básicos . . . . .	29
2.1.2	Dinâmica Local . . . . .	30
2.1.3	Tipos de Acoplamento . . . . .	30
2.1.4	Condições Iniciais e de Contorno . . . . .	32
2.2	Espectro de Lyapunov para mapas . . . . .	33
2.2.1	Espectro de Lyapunov para acoplamento local . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Plasmas e Difusão em Plasmas</b>	<b>35</b>
3.1	Critério para definir um plasma . . . . .	36
3.2	Difusão em plasmas . . . . .	38
3.3	Parâmetro de colisão . . . . .	39
3.3.1	Parâmetros de Difusão . . . . .	41
3.4	Decaimento do plasma por difusão . . . . .	42
3.5	Equação de Reação-difusão . . . . .	46
3.6	Equação de Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Discretização da equação diferencial parcial de reação-difusão</b>	<b>50</b>
4.1	Caso unidimensional . . . . .	51
4.2	Redes de mapas acoplados do tipo reação-difusão . . . . .	53
4.3	Formação de padrão . . . . .	55
4.3.1	Padrões aleatórios congelados . . . . .	56
4.3.2	Seleção de padrão com supressão de caos . . . . .	56
4.3.3	Variação da dinâmica do sistema em função do coeficiente de difusão e recombinação . . . . .	60
4.4	Defeitos caóticos . . . . .	63

<b>5</b>	<b>Equação de reação-difusão</b>	<b>66</b>
5.1	Equação reação-difusão não linear unidimensional . . . . .	67
5.2	Modelagem numérica da equação não linear de reação-difusão unidimensional . . . . .	68
5.2.1	Método das Diferenças Finitas (MDF) . . . . .	68
5.2.2	Discretização . . . . .	69
5.3	Aplicação do Método Implícito na Equação de reação-difusão	70
5.4	Padrões espaço-temporais . . . . .	76
5.4.1	Comparação entre as redes de mapas acoplados e equação de reação-difusão . . . . .	80
5.5	Comprimento de onda natural . . . . .	83
5.6	Expoente de Lyapunov Médio . . . . .	86
5.6.1	Expoente de Lyapunov para equação de reação-difusão	88
5.7	Defeitos Caóticos . . . . .	90
<b>6</b>	<b>Equação de reação-difusão com perturbação de ondas estacionárias em plasmas fracamente ionizados</b>	<b>92</b>
6.1	Expoente de Lyapunov médio para equação de reação-difusão perturbada . . . . .	95
6.2	Função de correlação espacial . . . . .	99
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>104</b>
	<b>REFERÊNCIA</b>	<b>108</b>
	<b>Appendices</b>	<b>115</b>
	<b>Apêndice A Artigo</b>	<b>115</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Muitos problemas em física de plasmas envolvem quantidades físicas que evoluem no tempo [1]. Essas quantidades são frequentemente descritas por sistemas de equações diferenciais não lineares [2] que não possuem soluções exatas. Um desses sistemas de equações muito importante é conhecido como equação de reação-difusão, que descreve processos de difusão no plasma, considerando termos de fontes não lineares [3]. Exemplos dessas fontes não lineares são as recombinações de elétrons e íons e a ionização de átomos neutros. Outros exemplos de fontes não lineares são as reações de deutério-deutério e deutério-trítio que ocorrem em plasmas de alta densidade em reações de fusão termonucleares como o que acontece nos tokamaks [4]. Nesse último caso, as diferentes espécies de partículas e suas evoluções são governadas por equações acopladas devido às reações entre elas [5].

De fato, quando consideramos plasmas homogêneos, estamos assumindo uma grande idealização, no caso mais realista, os plasmas sempre possuem um gradiente de densidade de partículas que tende a difundir para regiões com menores densidades [1], levando a um estado de equilíbrio [6]. A difusão ocorre como um processo de transporte fundamental, resultado de colisões de Coulomb de partículas carregadas eletricamente ou simplesmente devido às colisões com partículas neutras [7]. Nessa tese iremos tratar somente o caso de plasmas fracamente ionizados não magnéticos. Esses plasmas possuem uma baixa ionização e suas partículas carregadas colidem com mais frequência com os átomos neutros que com outras partículas carregadas. São chamados de não magnéticos por não possuírem campos magnéticos externos.

Plasmas fracamente ionizados são formados por elétrons livres, íons positivos e átomos neutros, que em média, são eletricamente neutros. Tais plasmas fracamente ionizados formam a espinha dorsal de uma ampla

variedade de plasmas de interesse tecnológico, uma vez que, os plasmas quimicamente reativos podem ser usados para modificar as propriedades da superfície dos materiais [8].

Para processos de difusão sem termos de fontes não lineares em plasmas frios, é possível obter soluções analíticas. Chen [1] obteve essas soluções tanto para coordenadas esféricas como cilíndricas. Não havendo os termos de fontes na equação de difusão, é observado um decaimento em sua densidade em função do tempo, ou seja, a densidade tende a zero, como mostrado nas soluções analíticas. Essa perda de plasma, com o tempo, pode ocorrer, quando ele atinge as paredes do recipiente ao qual está contido, por exemplo. No entanto, em muitas experiências de laboratório, a densidade do plasma é sempre mantida em um estado constante, ou por processo de contínua ionização, ou injeção de partículas neutras. Com a finalidade de manter o plasma num tempo longo o suficiente para o estudo das suas propriedades físicas, é necessário compensar as perdas por difusão reabastecendo os elétrons e os íons. Em termos da equação de difusão, isso implica a presença de um termo de fonte. Esse termo deve possuir tanto contribuições positivas como contribuições negativas, representando termos de produção e perda, respectivamente. O termo de fonte positiva é representado pelo processo de ionização. Existem muitos métodos diferentes para a criação(ionização) [9] e manutenção da densidade dos plasmas e, dependendo do método, o plasma pode ter alta ou baixa densidade, alta ou baixa temperatura, pode ser estável ou transitório, estável ou instável e assim por diante. Os processos mais conhecidos de ionização são: fotoionização e descarga elétrica em gases.

No processo de fotoionização, a ionização ocorre pela absorção de fótons incidentes cuja energia é igual ou maior que o potencial de ionização do átomo absorvente. O excesso de energia do fóton é transformado em energia cinética. Por exemplo, o potencial da energia de ionização para o elétron mais externo do átomo de oxigênio é  $13,6eV$ , que pode ser fornecido por radiação de comprimento de onda menor que cerca de  $91nm$  [9]. A ionização também pode ser produzida por raios-X ou raios gama, que têm comprimentos de onda muito menores.

Em uma descarga de gás, um campo elétrico é aplicado através do gás ionizado, o que acelera os elétrons livres em energias suficientemente altas para ionizar outros átomos por colisões. Uma característica desse processo é que o campo elétrico aplicado transfere energia com muito mais eficiência para os elétrons leves do que para os íons relativamente pesados. A temperatura dos elétrons nas descargas de gás é, portanto, mais alta que a temperatura dos íons, pois a transferência de energia térmica dos elétrons para as partículas mais pesadas é muito lenta.

Existem dois tipos de fontes que contribuem negativamente (diminuindo a densidade do plasma) para o termo de reação da equação de difusão: recombinação e aprisionamento de elétrons. A recombinação de íons-elétrons envolve a criação de átomos neutros com captura de elétrons por um íon positivo, contribuindo para a diminuição da densidade. Os processos de aprisionamento consistem na captura de elétrons por um átomo neutro, transformando-o em um íon negativo. A recombinação pode ser vista na prática quando a fonte ionizante é desligada, a ionização diminui gradualmente devido à recombinação até atingir um valor de equilíbrio consistente com a temperatura do meio. No laboratório, a recombinação, em geral, ocorre tão rapidamente que o plasma desaparece completamente em uma pequena fração de segundo. Em nosso trabalho, o termo de reação é formado exclusivamente pela soma da recombinação com a ionização. Adicionando esses dois termos na equação de difusão, obtemos a equação não linear de reação-difusão, onde a competição da reação e difusão pode levar a uma configuração simples, uniforme e de equilíbrio, bem como uma formação complicada de padrões, incluindo a formação de caos espaço-temporal [10]. A transição para caos espaço-temporal em plasmas magnéticos fracamente ionizados foi investigado experimentalmente em um magnetron cilíndrico, mostrando uma redução substancial da coerência espaço-temporal com grande potência de RF (Rádio Frequência) [11].

Kremp e seus colaboradores consideraram a equação da reação-difusão para um plasma denso de hidrogênio, mostrando uma variedade de fenômenos não lineares como biestabilidade, frentes de ionização e formação de gotículas [12]. Wilhelmsson investigou a equação reação-difusão apenas com o termo de recombinação, obtendo soluções particulares que descrevem a evolução de um estado localizado explosivo [13]. Nesse caso, vale mencionar a investigação numérica pioneira realizada por Ernest e Kerr [14] que já tinham estudado esse caso para o termo de recombinação quadrático em função da densidade, utilizando o método numérico de Crank — Nicholson. Através da solução numérica obtida, eles testaram os limites da aplicabilidade e a precisão do método da cavidade de micro-ondas para determinar o coeficiente de recombinação do plasma.

Um dos vários padrões espaço-temporais possíveis em sistemas não-lineares de reação-difusão é a criação de regiões espacialmente localizadas de comportamento caótico [15]. A interação dessas regiões pode levar à intermitência espaço-temporal, que muitas vezes, é o prelúdio de uma turbulência totalmente desenvolvida em fluidos e plasmas [16]. Muitos esforços têm sido gastos na caracterização quantitativa do estado turbulento, mas comparativamente menos investigações abordam o problema igualmente importante de como esse estado turbulento é formado [17].

Vale a pena mencionar que um dos artigos seminais da ciência não linear foi o início da turbulência por uma sequência de bifurcações de Hopf que levaram a um atrator caótico [18].

Enquanto o trabalho de Ruelle-Takens [19] se concentra em um atrator de baixa dimensão sem referência a graus espaciais de liberdade, uma descrição mais abrangente desse problema requer uma equação diferencial parcial no espaço e no tempo, com um termo de fonte não linear e um termo difusivo representando o acoplamento com as partículas de fluido vizinhos. É apenas deste ponto de vista que, no presente trabalho, pretendemos descrever a formação de padrões espaciais através da evolução do tempo governada por um sistema não-linear de reação-difusão. Em um plasma fracamente ionizado, consideramos a difusão ambipolar e a reação é representada pelos efeitos da ionização (fonte de íons) e recombinação (perda de íons), ambos representados por uma função de reação quadrática. Esse tipo de equação diferencial parcial com a não linearidade quadrática é conhecida na literatura como equação de Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov (Fisher-KPP), que foi introduzido por Fisher, descrevendo a difusão de um gene vantajoso mutante [20].

Para resolver um sistema não-linear de reação-difusão, é necessária a implementação de uma modelagem numérica. Nessa tese, utilizaremos duas metodologias numéricas para classificar o comportamento dinâmico da equação para plasmas fracamente ionizados, essas metodologias são: redes de mapas acoplados e integração numérica. A diferença básica entre esses dois métodos está na discretização do tempo. Nos dois métodos, tanto a variável temporal como a espacial assumem valores discretos, mantendo a variável de estado contínua, mas o que diferencia um método do outro é a forma da discretização temporal. Por exemplo, quando trabalhamos com redes de mapas, a discretização do tempo assume valores inteiros, ao contrário da integração numérica, onde  $\Delta t$  pode assumir valores tão pequenos o quanto desejarmos.

Ambas metodologias têm suas vantagens e desvantagens. Nas redes de mapas acoplados não há necessidade de um grande poder computacional, ou seja, seus programas, na média, não são tão pesados e são uma boa aproximação para o estudo qualitativo de sistemas dinâmicos [21–23]. Redes de mapas acoplados foram primeiramente estudados por Kaneko [24–26], utilizando o mapa logístico [16, 27] com acoplamento local e condição de contorno periódica. Ele observou a formação de vários padrões de domínios como o resultado da competição do acoplamento com a não linearidade do mapa. Kaneko classificou esses padrões da seguinte forma: padrão aleatório congelado, seleção de padrão, intermitência espaço-temporal e caos espaço-temporal completamente desenvol-



vido [24].

Considerando que o termo de reação atua de forma pulsada, podemos transformar a equação de reação-difusão em redes de mapas acoplados com o tempo e espaço discretos, e a variável de estado (densidade) contínua. Usando este modelo, a formação dos padrões é descrita por um diagrama de fases, onde identificamos os mesmos regimes já descritos por Kaneko [24]: padrão aleatório congelado, seleção de padrão, intermitência espaço-temporal e caos espaço-temporal completamente desenvolvido. A obtenção da formação desses padrões para as redes de mapas acoplados de reação-difusão é o resultado da competição dos seus três parâmetros: coeficiente de ionização, coeficiente de recombinação e difusão. Um desses regimes é caracterizado pela presença de regiões espacialmente localizadas de movimento caótico cujos limites podem se mover ao longo da rede de maneira semelhante à partícula, Kaneko classificou essas regiões de *defeitos caóticos* para mapas unidimensionais e *cordas caóticas* para mapas bidimensionais [28].

Nesse modelo de redes de mapas acoplados, mostramos que defeitos possuem um movimento que, apesar de completamente determinístico, possui as características estatísticas de um processo browniano com memória [29].

A desvantagem do método de redes de mapas acoplados, vem a partir da forma que é feita a discretização do tempo. Ao assumir valores inteiros, toda a informação da evolução temporal contida entre esses intervalos é perdida, resultando numa modelagem mais simples em relação à integração numérica, principalmente se tratando da física de plasmas. Já na integração numérica [30], como o intervalo de tempo é muito pequeno, a solução tem uma representatividade muito melhor nos seus resultados em comparação aos mapas, principalmente quando tratamos situações de plasmas reais. O que dificulta a utilização da integração numérica, é o tempo computacional gasto para a obtenção da solução numérica, como as instabilidades numéricas que dificultam muito sua investigação.

O método da Diferença Finita, utilizado com integração numérica, é uma forma alternativa para a obtenção da solução aproximada da equação diferencial parcial. Tem como principal objetivo transformar em um sistema de equações algébricas, o resultado de uma equação diferencial, substituindo as derivadas por diferenças através de séries de Taylor. O método da Diferença Finita é basicamente dividido em três metodologias, são eles: método explícito, método Implícito e método de Crank — Nicholson, utilizado por Ernest e Kerr [14]. Nessa tese utilizamos somente o método implícito que melhor se adaptou à nossa equação tanto na precisão e principalmente na estabilidade espacial nas regiões caóticas.

Uma das vantagens do método implícito é sua incondicionalidade estável, ou seja, o passo de tempo é independente da resolução espacial da grade adotada, diferente do que ocorre com o método explícito, ao qual, sua estabilidade numérica é muito dependente da grade escolhida. Ao integrar diretamente a equação de reação-difusão usando diferença finita implícita, também fomos capazes de identificar esses defeitos caóticos na formulação da equação diferencial parcial do problema, mostrando que o movimento do defeito caótico é semelhante a um movimento browniano cujo espectro de potência tem uma dependência da lei de potência com frequência característica dos processos com memória [31].

A existência de defeitos caóticos foi identificado no experimento realizado por C. Mei-Chu e seus colaboradores [32] em um sistema de plasma cilíndrico empoeirado de fraca ionização com densidade ( $n \approx 10^9 \text{ cm}^{-3}$ ) gerado em um gás argônio. Eles mostraram diretamente a observação de defeitos mediados por ondas acústicas. Nesse experimento, foi observada a transição de um padrão de onda com oscilações regulares para um padrão irregular com o surgimento de defeitos identificados pela baixa amplitude da onda (buracos). Essa transição foi realizada com a modulação da frequência e amplitude das ondas acústicas.

Esses defeitos aparecem como filamentos caóticos de orifício com velocidades e tempo de duração diferentes [Fig.1.1].

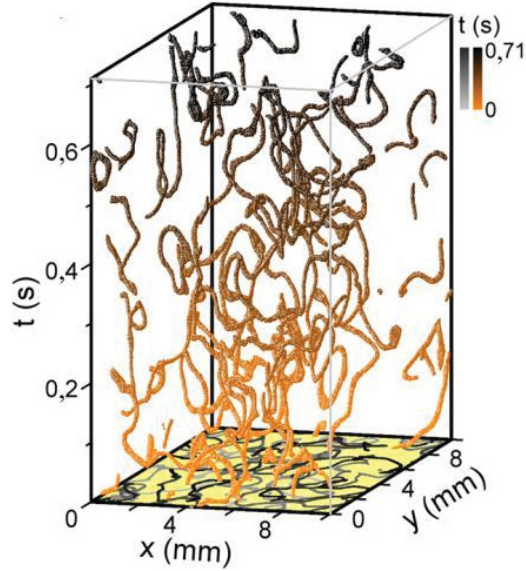


Figura 1.1: Esquema experimental dos filamentos de orifícios caóticos no espaço  $xyt$  para um sistema de plasma cilíndrico empoeirado de fraca ionização ( $n \approx 10^9 \text{ cm}^{-3}$ ), gerado em um gás argônio a 220 *mTorr*, usando um sistema de potência de 14 *MHz* RF a 2,8W de potência RF. Fonte: (Chang e Lin I, 2013, p 5)

Eles são criados e aniquilados aos pares em diferentes pontos através da geração e recombinação (Fig. 1.2); seu movimento temporal (Fig. 1.3) é formado pela oscilação dos padrões espaço-temporais do plasma. Eles podem ser aniquilados com seus pares ou com os seus vizinhos. Cada defeito possui um tempo transitório próprio e seu movimento é resultado do movimento oscilatório dos padrões regulares que os delimitam.

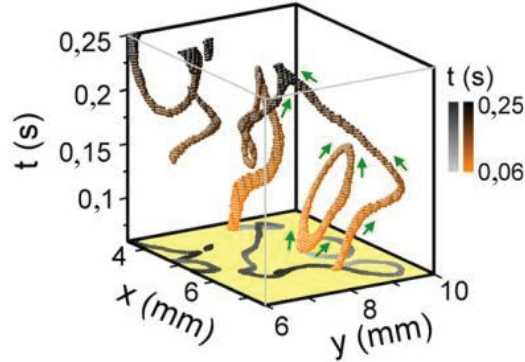


Figura 1.2: Regiões ampliadas dos filamentos de orifícios experimentais para um sistema de plasma cilíndrico empoeirado de fraca ionização ( $n \approx 10^9 \text{ cm}^{-3}$ ), gerado em um gás argônio a 220 *mTorr*, usando um sistema de potência de 14 *MHz* RF a 2,8W de potência RF. As setas indicam a direção em função do tempo. Fonte: (Chang e Lin I, 2013, p 5)

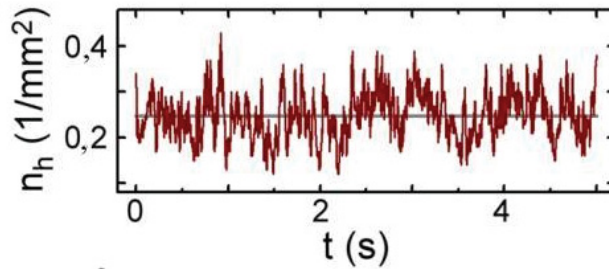


Figura 1.3: Evolução temporal experimental da densidade  $n_h$  no plano  $xy$  para em um sistema de plasma cilíndrico empoeirado de fraca ionização ( $n \approx 10^9 \text{ cm}^{-3}$ ), gerado em um gás argônio a 220 *mTorr*, usando um sistema de potência de 14 *MHz* RF a 2,8W de potência RF. Fonte: (Chang e Lin I, 2013, p 5)

Uma observação muito importante em relação a esse experimento é que a dinâmica desses defeitos é muito semelhante à descrição teórica dos defeitos caóticos obtidos tanto nas redes de mapas acoplados quanto na própria equação de reação-difusão.

A formação de padrões espaço-temporais identificados em nosso sistema pode ser parcialmente compreendida através de uma análise linear, mostrando que existe um comprimento de onda espacial natural que é

o comprimento característico dos padrões [33], conforme verificado pela comparação dessa previsão teórica com a contagem real do comprimento de onda espacial natural. Utilizamos um quantificador para a dinâmica temporal da rede desenvolvida por Shibata [34] Denominado expoente médio de Lyapunov que mede a desordem local na rede, e cuja dependência nos parâmetros representados no diagrama de fases, são compatíveis com os padrões espaço-temporais nele observados.

Como será visto no decorrer do nosso trabalho, iremos comparar esses dois métodos numéricos, demonstrando que as mesmas formações de padrões espaço-temporais encontradas nas redes de mapas acoplados podem ser obtidas na integração direta da equação de reação-difusão através da diferença finita implícita. E isso é de certa forma animador, pois mesmo um modelo simples como os mapas quadráticos podem descrever uma dinâmica muito rica na física de plasmas, recuperando muito dos padrões encontrados na integração direta a equação de reação-difusão.

No modelo de reação-difusão utilizado até agora, apenas um tipo de injeção de energia é representada para a ionização do plasma, que ocorre devido às colisões das partículas e também devido ao campo elétrico externo. Porém, a injeção de uma onda eletrostática externa pode causar uma nova característica, podendo suprimir ou mitigar o caos espaço-temporal ou desencadear esse efeito. Como sabemos, caos [21, 22, 35] e turbulência são frequentemente vistos como um grande desafio na criação de dispositivos de plasma [36]. O caos encontrado em plasmas tecnológicos tem sido um grande objeto de estudo, devido as suas instabilidades, resultado da combinação da não linearidade somada a outros fenômenos de instabilidade. Na estrutura de sistemas dinâmicos não lineares, várias estratégias foram desenvolvidas para obter controle ativo sobre comportamentos temporais ou espaço-temporais complexos [37, 38]. Novas aplicações da teoria do controle foram desenvolvidas para controlar o caos [39]. Seu grande sucesso reforçou todo o campo de feedback e sincronização de sistemas dinâmicos e muitos trabalhos foram desenvolvidos nessa direção. Thomas e seus colaboradores, em seu artigo [40], argumentam progressos recentes no controle do caos e turbulência, usando pequenas perturbações discretas, conseguiram controlar as oscilações caóticas, demonstrando seus resultados, tanto para o diodo clássico de Pierce (simulação) quanto para o diodo termiônico fortemente acionado (experimento). O sucesso no controle do caos foi tomado como um incentivo para resolver o problema de domar o caos espaço-temporal totalmente desenvolvido como, por exemplo, Christiane [41], Thomas [40] e seus colaboradores, trabalhando com plasmas magnetizados, mostraram que um controle global contínuo pode ser usado para estabilizar a turbulência das ondas de ionização pouco de-

envolvidas. Através da sincronização alcançada pela aplicação de um perfil de corrente com rotação poloidal, eles conseguiram controlar a turbulência tridimensional das ondas de deriva que são flutuações eletrostáticas que surgem devido a não-uniformidade do plasma. Como o sistema de reação-difusão em plasmas fracamente ionizados apresentam uma rica dinâmica com caos espaço-temporal e possuem grande aplicação tecnológica, é de grande interesse o entendimento da física no controle e supressão da turbulência desse sistema. O objetivo é entender a dinâmica que ocorre quando aplicamos uma perturbação externa na forma de uma onda estacionária usando a função de correlação espacial juntamente com o expoente de Lyapunov [42] para caracterizar a sua dinâmica. Com a correlação espacial, caracterizamos o perfil espacial, a tempo fixo [43], para diferentes amplitudes da onda externa aplicada [44]. A função de correlação espacial é muito útil na caracterização do caos espaço-temporal em um sistema espacialmente estendido [45].

A tese está dividida na seguinte forma:

No capítulo 2, realizamos uma revisão de redes de mapas acoplados e suas propriedades, mostramos o cálculo do espectro de Lyapunov e a entropia Kolmogorov-Sinai(KS) para redes de mapas acoplados [46, 47].

No capítulo 3, derivamos a equação de reação-difusão que descreve um plasma limitado em uma dimensão, onde os fluxos de partículas são devidos tanto a um campo elétrico quanto a um gradiente de densidade, gerando a difusão ambipolar. O termo de fonte na equação de reação-difusão é devido aos processos de ionização e recombinação. Nesse mesmo capítulo, mostramos a solução obtida por Chen [1], para o caso da equação de difusão linear.

No capítulo 4, utilizando a equação de reação-difusão pulsada, discretizamos o espaço e o tempo da equação na forma de redes de mapas acoplados, mostrando a formação de padrões espaço-temporais como também a sua dinâmica.

O capítulo 5 é dedicado a uma investigação sistemática de padrões espaço-temporais obtidos através da integração numérica da equação de difusão da reação não-linear, para intervalos de parâmetros limitados de interesse na física de plasma. Nesse capítulo, derivamos o comprimento de onda espacial natural para o sistema e o comparamos com estimativas numéricas dos comprimentos médios do padrão espacial. Também tratamos do expoente médio de Lyapunov usado para caracterizar o caos espaço-temporal.

No capítulo 6, integraremos numericamente a equação não linear de reação-difusão com uma perturbação externa senoidal em um plasma unidimensional limitado, nesta mesma seção, há investigação sistemática de

padrões espaço-temporais obtidos através da integração numérica da perturbação não-linear da equação reação-difusão. No capítulo 7, estão as conclusões e considerações finais.

## Capítulo 2

# Mapas acoplados

### 2.1 Mapas acoplados

Sistemas dinâmicos espaço-temporais [48] tem um número tipicamente muito grande de graus de liberdade. A extensão do estudo de sistema com baixa dimensionalidade para incluir graus de liberdade espacialmente distribuídos tem sido uma das áreas mais ativas de pesquisa em dinâmica não linear [16]. Este interesse é motivado pelo grande número de problemas práticos onde a dinâmica espacial desempenha um papel significativo: turbulência em fluidos e plasmas, ergodicidade na mecânica estatística, sólitons, redes neurais, formação de padrões em sistemas naturais, dentre outros [49].

Às vezes é dito, talvez injustamente, que a turbulência é o grande problema não resolvido da física clássica. O fato é que, a despeito do imenso esforço dispendido neste século, ainda parecemos estar longe de uma descrição satisfatória de todos os aspectos da turbulência. Ruelle e Takens [19], em 1971, sugeriram que a representação de um fluxo turbulento no espaço de fase poderia ser um atrator estranho, ou caótico. A conexão entre as propriedades de um sistema caótico de baixa dimensionalidade e a dinâmica espaço-temporal é uma das linhas de pesquisa mais intensa nesta área.

Em Ciências Naturais e Tecnológica, dependemos fortemente de modelos matemáticos para descrever os fenômenos observados. No que diz respeito a sistemas dinâmicos espacialmente estendidos [50], devemos considerar que os graus de liberdade espaciais devem ser adicionados aos modelos matemáticos obedecendo a uma simetria espacial. Esta simetria, a invariância translacional, restringe o tipo de acoplamento entre os graus de liberdade do sistema, já que a posição relativa dos graus de liberdade



espaciais determina as propriedades do acoplamento (mais ou menos intenso, nesta ou naquela direção, etc.).

Sistemas contínuos apresentam um número infinitamente denso de graus de liberdade espaciais, e são normalmente descritos por equações diferenciais parciais [51]. No entanto, estaremos mais interessados em sistemas que apresentam um número enumerável (e finito) de graus de liberdade espaciais, que denominaremos de sistemas dinâmicos na rede. A cada grau de liberdade espacial podemos assinalar uma variável de estado, que caracteriza alguma propriedade física do sistema que varia com o espaço e o tempo.

Na tabela 2.1 a seguir apresentamos uma hierarquia de sistemas dinâmicos espacialmente estendidos [28]. Equações diferenciais parciais têm o espaço, o tempo e as variáveis de estado contínuas. Equações funcionais iteradas diferem no tratamento do tempo como variável discreta. Cadeias de osciladores representam sistemas dinâmicos na rede onde a variável de estado local é contínua, ou seja, são redes de equações diferenciais ordinárias acopladas. Nessa tese utilizaremos redes de mapas acoplados, que têm espaço e tempo discretos, mas variáveis de estado contínuas. Uma categoria acima, ainda, dos autômatos celulares [52], onde todas as variáveis são discretas.

Sistemas	Espaço	Tempo	Variável de Estado
Equações diferenciais parciais	Contínuo	Contínuo	Contínua
Equações funcionais iteradas	Contínuo	Discreto	Contínua
Cadeias de osciladores	Discreto	Contínuo	Contínua
Redes de mapas acoplados	Discreto	Discreto	Contínua
Autômatos celulares	Discreto	Discreto	Discreta

Tabela 2.1: Hierarquia de sistemas dinâmicos espacialmente estendidos

Cada uma destas categorias de sistemas tem seus méritos e defeitos, sua utilização é determinada pelo balanço custo-benefício das características que definem o problema a ser resolvido. Por exemplo, poderíamos preferir as equações diferenciais parciais pela suposta “generalidade” que seu tratamento proporciona, mas isto é questionável, pois: (a) os métodos numéricos empregados para resolver problemas de valores de contorno acabam sempre por discretizar as variáveis espaciais e temporais; (b) o tempo computacional alto e a recorrente instabilidade numérica são fatores que dificultam a sua investigação.

Sistemas dinâmicos na rede, como mapas ou osciladores, são mais com-

plexos que autômata celulares, pois têm variáveis de estado contínuas e consequentemente a capacidade de gerar informação local. No entanto, há sistemas onde a informação local é naturalmente discreta, mesmo binária, como em determinadas redes neurais, e para elas a descrição mais adequada pode ser a dos autômata celulares [52].

Finalmente, redes de mapas acoplados podem ser obtidas como seções de Poincaré [53] (estroboscópicas) de cadeias de osciladores acoplados. Em certos casos, é possível passar de uma categoria a outra por meio de um processo sistemático de discretização que considera uma periodicidade natural, tanto no espaço como no tempo, sobretudo quando há uma perturbação do tipo função delta de Dirac periódica.

Redes de mapas acoplados foram introduzidas na dinâmica não linear a partir da tese de doutoramento de Kunihiko Kaneko [25], em 1983. Desde então, tem sido dele e seus colaboradores da Universidade de Tóquio as principais contribuições à teoria; embora haja vários outros grupos pesquisando o assunto em outras partes do mundo. Em 1993, Kaneko editou o livro [54] “Theory and Applications of Coupled Map Lattices” pela World Scientific, com contribuições de diversos autores. Ainda hoje, as principais revistas científicas na área de dinâmica não-Linear exibem um bom número de artigos neste assunto, que continua oferecendo problemas de interesse aos pesquisadores.

Devido às suas características de fácil implementação computacional, quando comparados a outros sistemas hierarquicamente superiores (vide Tabela), as redes de mapas acoplados têm sido escolhidas com frequência como ‘laboratórios’ teóricos para o estudo da dinâmica espaço-temporal. Respeitadas suas limitações enquanto modelos matemáticos da Natureza, podemos encarar as redes de mapas acoplados como paradigmas extremamente úteis para a investigação de fenômenos não-lineares espacialmente extensos.

A estratégia para modelar fenômenos dinâmicos em sistemas espacialmente extensos por redes de mapas acoplados é baseada nos seguintes passos [24]:

1. Escolha um conjunto de variáveis de estado macroscópicas numa rede. Num sistema físico-químico, por exemplo, tais variáveis podem ser a temperatura, o campo de velocidade do fluido ou a concentração local de alguma substância. A dimensão e a topologia da rede devem ser escolhidas de acordo com o sistema físico a ser modelado;
2. Decomponha o processo subjacente ao fenômeno em componentes independentes. Por exemplo, para um sistema fluido não-homogêneo

e condutor de calor, os processos de convecção, reação, difusão, etc.;

3. Substitua cada componente por uma dinâmica paralela simples na rede. A dinâmica consiste numa transformação não-linear das variáveis de estado em cada sítio da rede e um termo de acoplamento entre vizinhos adequadamente escolhidos;
4. Leve em consideração cada unidade dinâmica, ou processo, sucessivamente.

A maior motivação para o estudo das redes de mapas acoplados tem sido a investigação do caos espaço-temporal, entendido como a dinâmica caótica em sistemas espacialmente extensos, onde o número efetivo de graus de liberdade diverge quando o tamanho do sistema aumenta. O caos espaço-temporal é criado pela dinâmica não-linear local e pela difusão espacial. Nas redes de mapas acoplados estes procedimentos são considerados separadamente.

### 2.1.1 Conceitos básicos

Supomos uma rede espacial  $M$ -dimensional. Em princípio, trataremos do caso unidimensional ( $M = 1$ ) para definir os conceitos básicos, mas também nos reportaremos a estudos bi-e tri-dimensionais. A cada sítio da rede espacial, nós atribuímos uma variável de estado real  $D$ -dimensional  $\mathbf{x}^{(i)} \in R^D$ , onde  $i = 1, 2, \dots, N$  é o índice que identifica o  $i$ -ésimo sítio numa rede unidimensional com  $N$  sítios. Na maioria dos casos até agora estudados, a variável de estado é unidimensional ( $M = 1$ ), mas já existem estudos para  $M = 2$ .

O tempo é discretizado na forma usual  $n = 0, 1, 2, \dots$ , tal que  $\mathbf{x}_n^{(i)}$  seja a variável do sítio  $i$  no tempo  $n$ . A evolução de uma variável de estado local é governado por dois fatores:

1. a dinâmica local é regida por um mapa  $D$ -dimensional  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x})$  que avança discretamente no tempo;
2. o acoplamento a outros sítios por meio de uma certa prescrição;

De forma geral, a equação que define uma rede unidimensional de mapas acoplados é

$$\mathbf{x}_{n+1}^i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n^i) + C^{(i)}(\mathbf{x}_n^j), \quad (2.1)$$

onde  $C^{(i)}$  é um termo genérico de acoplamento, que pode depender de todos os sítios  $j = 1, 2, \dots, N$  inclusive o próprio sítio  $i$ . O vetor  $D$ -dimensional  $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^N)$ , que representa o estado da rede no tempo  $n$ , é dito o seu padrão neste instante.

### 2.1.2 Dinâmica Local

A dinâmica local tem sido investigada através de mapas de baixa dimensionalidade bem conhecidos. O exemplo mais estudado é o do mapa logístico utilizado por Kaneko [24] no estudo das redes de mapas acoplados.

$$x \longrightarrow f(x_n^i) = rx(1 - x), \quad (2.2)$$

onde  $x \in [0, 1]$  e  $r \in [1, 4]$  é o parâmetro de controle do mapa.

Quanto ao tipo de dinâmica local, podemos classificar as redes de mapas acoplados como

1. Homogêneas: quando os mapas são idênticos em todos os sítios;
2. Não-homogêneas: quando os mapas não são idênticos devido a mudanças nos seus parâmetros para cada sítio da rede;

Trabalharemos somente com mapas homogêneos.

### 2.1.3 Tipos de Acoplamento

Há muitas formas de acoplamento entre os mapas. Nos acoplamentos locais, a dinâmica de um dado sítio  $i$  é determinada apenas pelos sítios vizinhos mais próximos:  $i + 1$  e  $i - 1$ .

Acoplamentos não-locais permitem que o sítio  $i$  seja influenciado por um número arbitrariamente grande de outros sítios mais distantes.

Vamos abordar o primeiro caso. Um tipo genérico de acoplamento local é dado pelo termo de acoplamento.

$$C_{j=i, i \pm 1}^{(i)}(x_n^j) = \varepsilon_0 g(x_n^i) + \varepsilon_R g(x_n^{i+1}) + \varepsilon_L g(x_n^{i-1}) \quad (2.3)$$

onde  $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \varepsilon_R, \varepsilon_L)$  é chamado o núcleo de (Kernel) de acoplamento. Podemos enumerar quatro casos de interesse:

1. Acoplamento aditivo:  $\varepsilon_0 = 0, \varepsilon_R = \varepsilon_L$ .

2. Acoplamento Laplaciano, ou difusivo:  $-\frac{\varepsilon_0}{2}, \varepsilon_R = \varepsilon_L$ .
3. Acoplamento global:  $\varepsilon_0 = -\frac{2}{3}, \varepsilon_R = \varepsilon_L = \frac{1}{3}$ .
4. Acoplamento unidirecional:  $-\varepsilon_0 = \varepsilon_L, \varepsilon_R = 0$ .

O acoplamento Laplaciano

$$x_{n+1}^i = f(x_n^i) + \frac{\varepsilon}{2} (g(x_n^{i-1}) - 2g(x_n^i) + g(x_n^{i+1})), \quad (2.4)$$

é o mais utilizado nos estudos de redes de mapas acoplados. Seu nome decorre do fato de que o termo de acoplamento pode ser encarado como a discretização de uma derivada segunda espacial

$$\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} \longrightarrow \frac{1}{2} (g(x^{(i-1)}) - 2g(x^{(i)}) + g(x^{(i+1)})), \quad (2.5)$$

onde o parâmetro de rede espacial é igual a um:  $\Delta x = (i + 1) - i = 1$ . Tais derivadas ocorrem em termos difusivos de equações de reação-difusão.

As três primeiras escolhas para o núcleo de acoplamento referem-se a sistemas com difusão simétrica, ao passo que o último tipo corresponde a um acoplamento assimétrico. Redes com esta característica têm sido usadas para modelar fluxos abertos (open flow lattices).

A função  $g(x)$  define a dinâmica de acoplamento. Há apenas dois casos de interesse:

1. Acoplamento Linear:  $g(x) = x$ ;
2. Acoplamento Futuro:  $g(x) = f(x)$ .

sendo que o acoplamento futuro tem como vantagens o fato da variável de estado em cada sítio permanecer dentro do mesmo domínio que teria no mapa isolado, de modo que os mapas acoplados nas redes continuam normalizados. Além disso, no acoplamento futuro, nós pré-iteramos os sítios vizinhos ( $i \pm 1$ ) antes de acoplá-los ao sítio  $i$ . Isto fornece uma melhor aproximação a um mapeamento estroboscópico de uma cadeia análoga de osciladores a tempo contínuo.

A iteração simultânea dos vizinhos é uma aproximação melhor do estado corrente da rede, em relação ao simples uso de seus valores no instante precedente. Por exemplo, um acoplamento Laplaciano futuro é dado por

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^{(i)} &= f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} \left( (f(x_n^{(i-1)})) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i+1)}) \right) \\
&= (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} \left( (f(x_n^{(i-1)})) + f(x_n^{(i+1)}) \right).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

No entanto, poderíamos permutar os processos, primeiro acoplando os valores dos vizinhos e depois aplicando a função do mapa ao resultado:

$$x_{n+1}^{(i)} = f \left( (1 - \varepsilon)x_n^{(i)} + \frac{\varepsilon}{2}(x_n^{(i-1)} + x_n^{(i+1)}) \right). \tag{2.7}$$

Esta substituição parece não alterar qualitativamente nenhum dos resultados obtidos com a primeira forma do mapa.

### 2.1.4 Condições Iniciais e de Contorno

Sendo um sistema espacialmente extenso, redes de mapas acoplados precisam de condições de contorno adequadas (nos extremos da rede:  $i = 0$  e  $i = N - 1$  )

1. Fixas:  $x_n^{(0)} = a, x_n^{(N-1)} = b$ , onde usualmente  $a = b = 0$  ;
2. periódicas:  $x_n^{(0)} = x_n^{(N)}$  ou em geral  $x_n^{(i)} = x_n^{(i+N)}$  para todo  $i$ ;
3. livres:  $x_n^{(0)}$  e  $x_n^{(N-1)}$  podem ter quaisquer valores;
4. mistas: uma extremidade fixa e outra livre;

Devem ser também especificadas condições iniciais em  $n = 0$  para a rede. Dentre as diversas escolhas possíveis, destacamos as seguintes:

1. perfil constante:  $x_0^{(i)} = \text{const}$ ;
2. perfil senoidal:  $x_0^{(i)} = A + B \sin(2\pi i/N)$ .
3. perfil gaussiano:  $x_0^{(i)} = C e^{-(i-j)^2/N}$ .
4. perfil aleatório:  $x_0^{(i)}$  = número pseudo-aleatório dentro de um certo domínio, como  $[0, 1]$ .

Certas características, como veremos, dependem desta escolha. Outras não, razão pela qual os perfis iniciais aleatórios são preferíveis em muitas aplicações.

## 2.2 Espectro de Lyapunov para mapas

Do ponto de vista da dinâmica não-linear, uma rede com  $N$  mapas unidimensionais acoplados é equivalente a um grande sistema dinâmico com  $N$  dimensões, ou um mapa  $N$ -dimensional [47]

$$x_{n+1}^0 = F_0(x_n^{(0)}, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(N-1)}), \quad (2.8)$$

$$x_{n+1}^1 = F_1(x_n^{(0)}, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(N-1)}), \quad (2.9)$$

$$x_{n+1}^2 = F_2(x_n^{(0)}, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(N-1)}), \quad (2.10)$$

$$\vdots = \vdots \quad (2.11)$$

$$x_{n+1}^{N-1} = F_{N-1}(x_n^{(0)}, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(N-1)}). \quad (2.12)$$

Os expoentes de Lyapunov caracterizam o quanto uma pequena distância no espaço tangente ao espaço de fase das variáveis dinâmicas será ampliada (ou reduzida). Um mapa  $N$ -dimensional é definido num espaço de fase  $N$ -dimensional, de modo que nele há  $N$  direções independentes. Correspondendo a cada uma delas há um total de  $N$  expoentes de Lyapunov ordenados  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots \lambda_N$ , que formam o chamado “espectro de Lyapunov”.

Sendo assim, a teoria dos sistemas dinâmicos nos ensina que devemos primeiramente calcular o produto ordenado de  $n$  matrizes jacobianas do mapa  $N$ -dimensional (uma para cada instante de tempo) onde as componentes das matrizes jacobianas são dadas por

$$(\mathbf{J}_n)_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_n^{(j)}}. \quad (2.13)$$

Os expoentes de Lyapunov  $\lambda_i$  são dados pelos logaritmos dos autovalores da matriz  $\mathbf{A}_n$  acima definida, dividido pelo número  $n$  de iterações, e fazendo-se este número tender a infinito. Cada expoente está associado a um autovetor  $\mathbf{u}_i$ , ou autodireção, correspondente a estes autovalores [55]:

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right) \ln \|\mathbf{A}_n \cdot \mathbf{u}_i\|. \quad (2.14)$$

### 2.2.1 Espectro de Lyapunov para acoplamento local

No caso de redes de mapas com acoplamento laplaciano futuro

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon) f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} \left( f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)}) \right). \quad (2.15)$$

Neste caso, podemos escrever a matriz jacobiana a cada instante de tempo como o produto  $\mathbf{J}_n = \mathbf{F}_n \mathbf{D}_n$  de uma matriz diagonal (proporcional à matriz identidade)

$$F_{ij} = f'(x_n^{(i)}) \delta_{ij}, \quad (2.16)$$

por uma matriz de difusão

$$D_{ij} = (1 - \varepsilon) \delta_{ij} + \frac{\varepsilon}{2} (\delta_{i,j+1} + \delta_{i,j-1}), \quad (2.17)$$

de modo que

$$(\mathbf{J}_n)_{ij} = \sum_{l=1}^N D_{il} f'(x_n^{(l)}) \delta_{lj} \quad (2.18)$$

ou, em componentes

$$A = \begin{bmatrix} (1 - \varepsilon)f'(x_n^{(1)}) & \varepsilon/2 f'(x_n^{(2)}) & 0 & \dots \\ \varepsilon/2 f'(x_n^{(1)}) & (1 - \varepsilon)f'(x_n^{(2)}) & \varepsilon/2 f'(x_n^{(3)}) & \dots \\ 0 & \varepsilon/2 f'(x_n^{(2)}) & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & (1 - \varepsilon)f'(x_n^{(N)}) \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

O expoente máximo de Lyapunov  $\lambda_i$  caracteriza a taxa com que um deslocamento pequeno arbitrariamente escolhido é ampliado. Como as redes de mapas acoplados são um sistema fechado, o teorema de Pesin [21] nos diz que a soma dos expoentes de Lyapunov positivos, que fornece a taxa de ampliação de uma bola N-dimensional infinitesimal, são iguais à entropia de Kolmogorov-Sinai ou KS-entropia [56]. Num sistema espacialmente extenso como o nosso, são mais úteis quantidades intensivas, ou seja, que são divididas pelo tamanho da rede. Desta forma, nos interessará a densidade de entropia KS, que é definida a partir da medida de informação de uma única variável aleatória, dada por

$$h_\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{\lambda_i > 0} \lambda_i. \quad (2.20)$$



## Capítulo 3

# Plasmas e Difusão em Plasmas

O estado físico da matéria é determinado por forças intermoleculares, quando há fornecimento de energia térmica suficiente, há transformação de um estado para outro. Por exemplo, fornecemos energia térmica para uma substância que se encontra inicialmente no estado sólido, até sua temperatura de fusão, haverá uma transição de fase para o estado líquido, da mesma forma, fornecendo energia térmica suficiente para quebrar as ligações intermoleculares do estado líquido ocorrerá uma transição de fase para o estado gasoso, se continuarmos a fornecer energia e se essa for suficiente para dissociar as moléculas do gás em elétrons e íons, permanecendo dessa forma, poderemos ter a formação de um plasma.

Nem todo o gás ionizado pode ser considerado plasma, a definição mais aceita diz: “plasma é um gás quase neutro de partículas carregadas e neutras que exibem comportamento coletivo”. Além disso, todo o gás possui algum grau de ionização, de acordo com a equação de Saha [1]:

$$\frac{n_i}{n_n} \approx 2,4 \times 10^{21} \frac{T^{\frac{3}{2}}}{n_n} e^{-\frac{U_i}{k_B T}}, \quad (3.1)$$

onde  $n_i$  é a densidade dos átomos ionizados em um gás,  $n_n$  a densidade de átomos neutros,  $T$  é a temperatura do gás em Kelvin,  $U_i$  é a energia de ionização do gás e  $k_B = 1,346 \times 10^{-23} \text{ J/K}$  é a constante de Boltzmann.

Por definição: A energia de ionização [57, 58] é a energia necessária para retirar o elétron mais externo de um átomo do gás para que se torne um elétron livre e o átomo um íon.

Ele ocorre da seguinte maneira: há uma distribuição de energia térmica dos átomos no gás, portanto, uma distribuição de velocidades. Para que um átomo fique ionizado é necessário que este sofra uma colisão de energia suficientemente alta para que um elétron seja arrancado de sua camada mais externa. Isso ocorrerá se alguns átomos forem acelerados

a uma energia superior à energia cinética média da distribuição, ou seja, se alguns átomos tiverem uma velocidade superior à velocidade média da distribuição, são os átomos da “cauda” da distribuição. O número de átomos rápidos pode ser visto como o número de átomos que ficaram ionizados. De acordo com a equação de Saha, o número de átomos ionizados decai com  $e^{-\frac{U_i}{k_b T}}$ , isto é, uma vez que um átomo sofra uma colisão de alta energia e fique ionizado, este colidirá rapidamente com algum elétron livre e se recombinará, tornando neutro novamente. Então o número de átomos ionizados permanece baixo até que a temperatura seja tão alta que  $k_b T$  tenha um valor próximo de  $U_i$ . Aumentando a temperatura, a densidade de átomos ionizados torna-se maior que a densidade de átomos neutros e o gás estará majoritariamente ionizado.

### 3.1 Critério para definir um plasma

Para entendermos a definição de plasma é necessário compreendermos o comportamento coletivo e a quase neutralidade [9].

Devido ao plasma ser formado basicamente de partículas carregadas (elétrons e íons), o movimento dessas partículas em uma determinada região produz campos eletromagnéticos que afetam outras regiões do plasma, como as forças coulombianas são interações de longo alcance, uma porção do plasma é influenciada por outra região mesmo que estejam separadas por uma grande distância. Diferentemente do que ocorre nos gases neutros, cuja interação só ocorre durante a colisão, o plasma possui um comportamento coletivo.

A quase neutralidade do plasma é devida a sua habilidade de blindar campos elétricos em seu interior, conhecida como blindagem de Debye [1, 9]. Quando colocamos cargas elétricas no interior do plasma, conectados a uma bateria, por exemplo, como mostra a figura 3.1, rapidamente os elétrons livres do plasma serão atraídos pelo terminal positivo da bateria e os íons serão atraídos pelo negativo, formando uma nuvem de blindagem eletrônica.

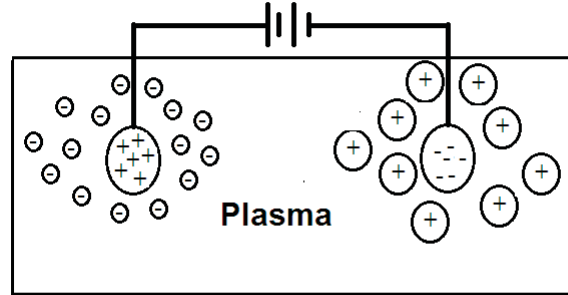


Figura 3.1: Adicionando um campo elétrico dentro de um plasma, através de duas esferas carregadas conectadas a uma bateria, há uma atração das partículas com a carga oposta e quase imediatamente uma nuvem de íons envolve a esfera negativa e uma nuvem de elétrons envolve a esfera positiva, produzindo um escudo em torno dessas esferas. A região fora do escudo permanece neutra.

Como no plasma, as partículas possuem alta energia térmica, essa blindagem não é perfeita, e algumas partículas próximas das extremidades da nuvem de blindagem conseguem vencer a barreira de potencial elétrico devido ao seu movimento térmico. Portanto, na extremidade da nuvem a energia potencial elétrica é aproximadamente igual à energia térmica das partículas. O raio da nuvem de blindagem é dado pelo comprimento de Debye [9].

$$\lambda_D \equiv \left( \frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.2)$$

onde  $n_e$  e  $T_e$  são respectivamente a densidade e a temperatura dos elétrons do plasma,  $k_B$  é a constante de Boltzmann e  $\epsilon_0$  a constante dielétrica no vácuo. A temperatura e a densidade dos elétrons, são usadas na definição acima, devido aos elétrons terem maior velocidade que os íons.

A quase neutralidade do plasma é devida ao fato de que a blindagem de Debye ocorre em uma região muito pequena comparada a dimensão do plasma. Isto resulta que, em regiões fora da nuvem de blindagem, as partículas continuam se recombinando devido às colisões provocadas pelo movimento térmico e o plasma é dito quase neutro. Assim o plasma fica

livre de grandes potenciais e campos elétricos na maior parte da sua extensão, havendo um desbalanço de cargas apenas nas pequenas regiões contidas dentro das nuvens de blindagens.

Para a blindagem de Debye ser efetiva devem existir partículas suficientes dentro dessa nuvem. Claramente, se houver apenas uma ou duas partículas na região, a blindagem de Debye não seria um conceito estatisticamente válido [1]. O número de partículas  $N_D$  na esfera de Debye pode ser determinada por [1]:

$$N_D = n \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3 = 1,38 \times 10^6 T^{3/2} / n^{1/2}, \quad (3.3)$$

onde  $n$  é a densidade do plasma. Para caracterizar um plasma é necessário que:

$$N_D \gg 1 \quad (3.4)$$

A quase neutralidade permite dizer que a densidade de elétrons é aproximadamente igual à densidade de íons,  $n_i \approx n_e \approx n$ , mas, em contrapartida, os efeitos eletromagnéticos não estão ausentes no plasma.

Então podemos concluir que para um gás ionizado seja quase neutro e, portanto, ser considerado um plasma de acordo com (3.2), é necessário que seja denso o suficiente para que  $\lambda_D$  seja pequeno o bastante em comparação ao tamanho característico  $L$  do plasma.

Uma terceira condição tem a ver com as colisões. O gás fracamente ionizado em um escapamento de jato, por exemplo, não se qualifica como plasma porque as partículas carregadas colidem com tanta frequência com os átomos neutros que seu movimento é controlado por forças hidrodinâmicas comuns e não por forças eletromagnéticas. Se  $\omega$  é a frequência de oscilações típica do plasma e  $\tau$  é o tempo médio entre as colisões com os átomos neutros, é necessário que  $\omega\tau > 1$  para que o gás se comporte como um plasma em vez de um gás neutro.

Resumindo, para que um gás ionizado seja caracterizado como um plasma, deve atender as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \lambda_D &\ll L \\ N_D &\gg 1 \\ \omega\tau &> 1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

## 3.2 Difusão em plasmas

A difusão é um fenômeno físico que ocorre quando há uma diferença espacial na concentração de partículas ou energia, e sempre age no sentido

de reduzir essas inhomogeneidades espaciais.

Por simplicidade, iremos tratar os casos de difusão no plasma na ausência de campos magnéticos externos. Iniciaremos com a situação mais simples, considerando plasmas fracamente ionizados. Nesse modelo simples, as partículas carregadas colidem com mais frequência com os átomos neutros do que com outras partículas carregadas.

Plasmas parcialmente ionizados não são muito raros: Arcos de alta pressão e plasmas ionosféricos se enquadram nessa categoria, e a maior parte do trabalho inicial sobre descargas de gás envolveu ionizações entre  $10^{-3}$  e  $10^6$ , quando colisões com átomos neutros são dominantes.

A figura, retirada de [1], mostra uma distribuição não uniforme de íons e elétrons em um fundo denso de átomos neutros (Fig. 3.2). Como o plasma se espalha como resultado do gradiente de pressão e forças eletromagnéticas, as partículas individuais passam por um caminho aleatório, colidindo com os átomos neutros.

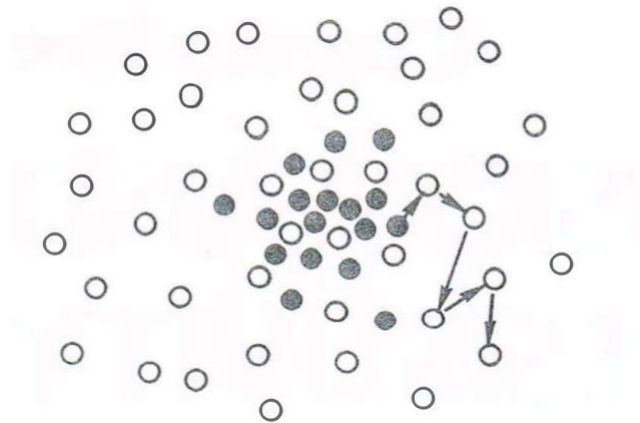


Figura 3.2: Distribuição não uniforme de íons e elétrons em um fundo denso de átomos neutros. Essas partículas carregadas se difundem através de átomos neutros através de uma caminhada aleatória, colidindo frequentemente com átomos neutros. Fonte: [1]

### 3.3 Parâmetro de colisão

Quando um elétron colide com um átomo neutro ele perde parcialmente seu momento linear dependendo do ângulo que ele colide, em uma colisão frontal com um átomo pesado, o elétron pode perder duas vezes o seu momento inicial, uma vez que a sua velocidade inverte o sinal após

a colisão. A probabilidade de perda de momento do elétron pelo átomo pode ser expressa em termos da secção transversal  $\sigma$ .

Na Fig. 3.3 retirada de [1], os elétrons incidem num bloco de área  $A$  de espessura  $dx$  contendo  $n_n$  átomos neutros por  $m^3$ . Os átomos são definidos como esferas ocas de secção transversal  $\sigma$ , isto é, cada vez que um elétron vai na direcção de bloco e é bloqueado pelo átomo, o elétron perde todo seu momento. O número de átomos no bloco é

$$n_n A dx \quad (3.6)$$

A fração de átomos no bloco é dado por

$$n_n A \sigma dx / A = n_n \sigma dx. \quad (3.7)$$

Se o fluxo incidente de elétrons no bloco é  $J$ , o fluxo que surge no outro lado do bloco é

$$J' = J(1 - n_n \sigma dx). \quad (3.8)$$

A variação do fluxo em relação à distância

$$\frac{dJ}{dx} = -n_n \sigma J \quad (3.9)$$

ou

$$J = J_0 e^{-n_n \sigma x} \equiv J_0 e^{-x/\lambda_m}. \quad (3.10)$$

Na distância  $\lambda_m$  o fluxo diminui  $1/e$  do seu valor inicial. A quantidade  $\lambda_m$  é definido como o *livre caminho médio* por colisões

$$\lambda_m = \frac{1}{n_n \sigma}. \quad (3.11)$$

Após as partículas percorrerem  $\lambda_m$  tem uma grande probabilidade de colidir novamente. O tempo médio entre as colisões, por partículas com velocidade  $v$ , é dado por

$$\tau = \lambda_m / v, \quad (3.12)$$

e a frequência média de colisões é

$$\tau^{-1} = v / \lambda_m = n_n \sigma v. \quad (3.13)$$

Se agora fizermos a média sobre todas as partículas com velocidades  $v$  em uma distribuição Maxwelliana, temos o que é geralmente chamado de frequência de colisão:

$$\nu = n_n \overline{\sigma v}. \quad (3.14)$$

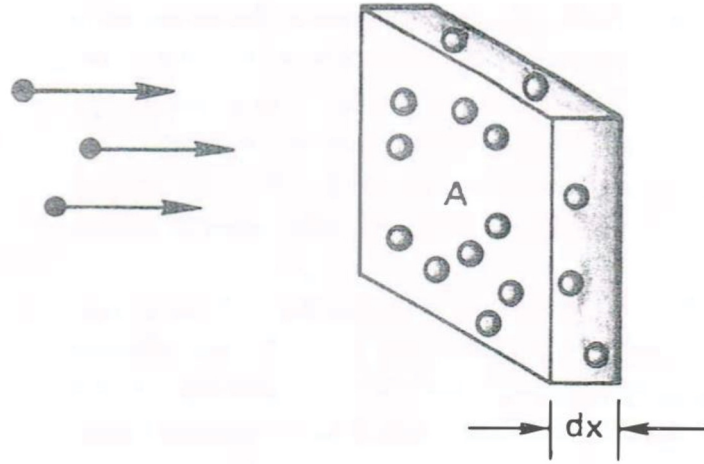


Figura 3.3: Ilustração da definição de seção transversal de choque. As bolinhas pretas representam elétrons incidindo num bloco de área  $A$  e espessura  $dx$  contendo  $n_n$  átomos neutros por  $m^3$ . Fonte: [1]

### 3.3.1 Parâmetros de Difusão

A equação de movimento do plasma, sem um campo magnético externo, e com o termo de colisão para qualquer espécie é escrita na forma

$$mn \frac{d\mathbf{v}}{dt} = mn \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \pm en\mathbf{E} - \nabla p - mn\nu\mathbf{v}, \quad (3.15)$$

onde  $m$  é a massa,  $n$  a densidade de partículas,  $e$  a carga das partículas,  $\mathbf{E}$  o campo elétrico,  $p$  a pressão e  $\nu$  a frequência de colisão.

Considerando o estado estacionário  $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$  e velocidade uniforme  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , a equação (3.15) torna-se

$$\pm en\mathbf{E} - \nabla p - mn\nu\mathbf{v} = 0, \quad (3.16)$$

da termodinâmica podemos escrever o gradiente de pressão [59] como sendo

$$\nabla p = k_B T \nabla n, \quad (3.17)$$

onde  $T$  é a temperatura do plasma e  $k_B$  é a constante de Boltzmann. Substituindo (3.17) na equação (3.16) e isolando  $\mathbf{v}$ , obtemos

$$\mathbf{v} = \pm \frac{e\mathbf{E}}{m\nu} - \frac{k_B T}{m\nu} \frac{\nabla n}{n}. \quad (3.18)$$

Com isso podemos definir, da equação (3.18), os seguintes coeficientes:

$$\mu = \frac{|e|}{m\nu}, \quad (3.19)$$

$$D = \frac{k_B T}{m\nu}, \quad (3.20)$$

que são o coeficiente de mobilidade e difusão, respectivamente. Esses coeficientes são diferentes para cada espécie que formam o plasma e  $D$  é medido em  $m^2/s$ . Eles podem ser conectados pela *Relação de Einstein*

$$\mu = \frac{|e|D}{k_B T}. \quad (3.21)$$

Com ajuda dessas definições, o fluxo das partículas do plasma  $\mathbf{J}_j$  para cada espécie  $j$  pode ser escrito como

$$\mathbf{J}_j = \pm \mu_j n \mathbf{E} - D_j \nabla n. \quad (3.22)$$

A lei de Fick da difusão é um caso especial, que ocorre quando  $\mathbf{E} = 0$ , ou seja, as partículas não possuem carga  $\mu = 0$

$$\mathbf{J}_j = -D_j \nabla n. \quad (3.23)$$

Esta equação expressa que a difusão é um processo de caminho aleatório, em que um fluxo líquido de partículas de uma região mais densa para uma região menos densa ocorre simplesmente porque mais partículas começam na região mais densa. Este fluxo é obviamente proporcional ao gradiente da densidade.

### 3.4 Decaimento do plasma por difusão

Consideramos agora um plasma criado em um recipiente, ao qual, se decompõe por difusão nas suas paredes, uma vez que íons e elétrons ao atingirem a parede, ocorre recombinação. A densidade perto da parede, portanto, é essencialmente zero.

Dado a equação da continuidade

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_j, \quad (3.24)$$

onde  $J_j$  é dado pela equação (3.22). A equação (3.24) vem da lei de conservação de partículas que nos diz que: o fluxo de partículas de uma superfície fechada é igual à variação temporal dessas partículas dentro dessa superfície.

Considerando a quase neutralidade do plasma, é de se esperar que as taxas de difusão dos íons e elétrons se ajustem de alguma maneira, de modo que, as duas espécies saem na mesma proporção. Por exemplo, os



elétrons, sendo mais leves, têm velocidades térmicas mais altas e tendem a deixar o plasma em primeiro lugar. Uma carga positiva é deixada para trás, e um campo elétrico é configurado de tal polaridade a ponto de retardar a perda de elétrons e acelerar a perda de íons. O campo elétrico é obtido para  $\mathbf{J}_e = \mathbf{J}_i = \mathbf{J}$ , a partir da equação (3.22)

$$\mathbf{J} = \mu_i n \mathbf{E} - D_i \nabla n_i - \mu_e n \mathbf{E} - D_e \nabla n_e, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{E} = \left( \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \right) \frac{\nabla n}{n}. \quad (3.26)$$

O fluxo comum  $\mathbf{J}$  é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mu_i \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \nabla n - D_i \nabla n \\ &= \frac{\mu_i D_i - \mu_i D_e - \mu_i D_i - \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \nabla n \\ &= - \frac{\mu_e D_i + \mu_i D_e}{\mu_i + \mu_e} \nabla n. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Essa é a lei de Fick com um novo coeficiente de difusão.

$$D = \frac{\mu_e D_i + \mu_i D_e}{\mu_i + \mu_e}, \quad (3.28)$$

que é chamado como "*Coeficiente de difusão ambipolar*" e é independente da densidade como é uma constante então a equação (3.24) torna-se a equação de difusão

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 n \quad (3.29)$$

onde agora depende somente da densidade das partículas.

Como vimos, a frequência de colisão depende da massa da partícula, como  $\nu \propto m_s^{-\frac{1}{2}}$  e com isso  $\mu_s \propto m_s^{-\frac{1}{2}}$  cuja razão é dado por

$$\frac{\mu_e}{\mu_i} = \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{-\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{1840} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx 43, \quad (3.30)$$

isso nos conduz à  $\mu_e \gg \mu_i$ . Utilizando essa aproximação, podemos reescrever o coeficiente de difusão

$$D \approx D_i + \frac{\mu_i}{\mu_e} D_e \approx D_i + \frac{T_e}{T_i} D_i, \quad (3.31)$$

para  $T_e = T_i$ , temos  $D \approx 2D_i$ , isto é, o campo elétrico ambipolar aumenta a difusão de íons por um fator de dois. Usando (3.20) temos

$$D = \frac{2kT}{mv}, \quad (3.32)$$

que nos conduz a equação de difusão

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 n, \quad (3.33)$$

onde a taxa de difusão das duas espécies juntas é controlada pela espécie mais lenta, os íons.

A equação de difusão (3.33) pode ser facilmente resolvida através do método de separação de variáveis

$$n(\mathbf{r}, t) = T(t)R(\mathbf{r}), \quad (3.34)$$

onde substituindo na Eq. (3.33), obtemos duas equações diferenciais que podem ser resolvidas independentemente.

$$\frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = \beta, \quad (3.35)$$

$$D \frac{1}{R(\mathbf{r})} \nabla^2 R(\mathbf{r}) = \beta, \quad (3.36)$$

onde  $\beta$  é uma constante.

Vamos considerar que o período de colisão do plasma é constante, então

$$\beta = -\frac{1}{\tau}, \quad (3.37)$$

onde  $\tau$  é o período de colisão do plasma. A solução para a equação diferencial dependente do tempo é

$$T(t) = T_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (3.38)$$

Para resolvermos a equação diferencial espacial, por simplicidade, vamos considerar o caso unidimensional em coordenadas cartesianas.

$$\frac{d^2 R(x)}{dx^2} = -\frac{1}{D\tau} R(x), \quad (3.39)$$

cujas a solução pode ser escrita na forma

$$R(x) = A \cos\left(\frac{x}{\sqrt{D\tau}}\right) + B \sin\left(\frac{x}{\sqrt{D\tau}}\right). \quad (3.40)$$

Vamos supor a seguinte condição de contorno: O plasma está contido entre duas paredes como mostrado na Fig. 3.4. Quando íons e elétrons atingem as paredes, eles se recombinaem e, a densidade nas paredes é zero, produzindo condições de contorno de Dirichlet nas mesmas. Por simetria podemos desprezar o termo seno na solução. Utilizando a condição de contorno onde  $R = 0$  para  $x = \pm L$

$$\frac{L}{\sqrt{D\tau}} = \frac{\pi}{2}, \quad (3.41)$$

ou

$$\tau = \frac{2L}{\pi} \frac{1}{D}, \quad (3.42)$$

substituindo as duas soluções em (3.34), chegamos na solução para a densidade do plasma

$$n(x, t) = n_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right). \quad (3.43)$$

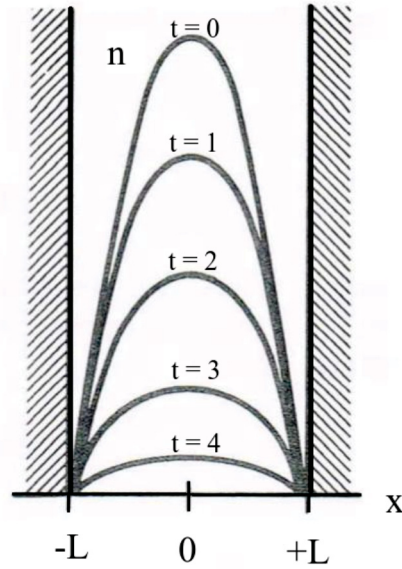


Figura 3.4: Densidade do plasma variando com o tempo, onde para um tempo muito grande a densidade vai a zero. Fonte: Adaptada de [1]

Essa solução é chamada de *menor modo de difusão*, e nos mostra que a densidade decai exponencialmente com o tempo até ir a zero conforme vemos na Fig. 3.4. A constante de tempo  $\tau$  é proporcional a  $L$  e inversamente

proporcional a  $D$  como é de se esperar, essa solução foi obtida por Chen [1]. Nessa referência há outras soluções para equação (3.33), como para coordenadas cilíndricas na forma da função de Bessel  $n = n_0 e^{-t/\tau} J_0\left(\frac{r}{\sqrt{D\tau}}\right)$ , que também nos mostra um decaimento exponencial da densidade em função do tempo.

### 3.5 Equação de Reação-difusão

De acordo com a solução da equação (3.33), para um tempo muito grande, a densidade do plasma sempre vai a zero. Como em muitos experimentos, onde o plasma sempre é mantido em um estado constante por processo de contínua ionização ou injeção de partículas, é necessário introduzirmos um termo de fonte na equação de difusão.

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - D\nabla^2 n = Q(\mathbf{r}). \quad (3.44)$$

O termo fonte possui contribuições positivas e negativas ( $Q = Q^+ + Q^-$ ), representando termos de produção e perda, respectivamente. O termo de fonte positivo é representado pelo processo de ionização, do qual, há vários tipos: basicamente um átomo neutro perde um elétron da valência e produz um elétron e um íon positivo. Há duas categorias de fontes negativas, ou termo de perda, contribuindo para o termo de reação da equação de difusão: recombinação e aprisionamento de elétrons [60]. A recombinação de íons-elétrons envolve a criação de átomos neutros por captura de elétrons por um íon positivo. Os processos de aprisionamento consistem na captura de elétrons por um átomo neutro, transformando-o em um íon negativo.

Os elétrons sofrem colisões inelásticas com átomos neutros em plasmas fracamente ionizados, e os átomos neutros são excitados para níveis mais altos de energia. A energia mínima para excitação dos níveis de energia eletrônica em um átomo neutro é da ordem de 10 eV [61]. Se a energia do elétron incidente for maior que o limite, um elétron é emitido e o átomo neutro se torna um íon positivo. Esse processo é chamado de ionização direta.

A seção transversal da excitação cresce com a energia logo abaixo do limite de excitação, com um valor máximo próximo ao limite e diminui com a energia após o limite. Uma vez que o elétron vem a partir de um átomo excitado, o processo de ionização aumenta a densidade do elétron

$n$ . Atualmente o termo de fonte devido à ionização é proporcional ao produto entre a densidade do elétron  $n_e = n$  e a densidade do átomo neutro  $n_a$

$$Q^+ = \left( \frac{\partial n}{\partial t} \right)_i = k_i n_a n_e \equiv an. \quad (3.45)$$

onde  $k_i = \langle \sigma_a^i(v)v \rangle$  é a constante de ionização, que depende da seção transversal da ionização  $\sigma_a^i$  e a média é realizada sobre a distribuição de elétrons com energia que excede o limiar de ionização.

É possível obter uma expressão para a seção transversal de ionização do modelo atômico clássico de Thomson-Rutherford que, após a integração, fornece o coeficiente de taxa de ionização direta como [60].

$$k_i(T_e) = \sqrt{\frac{8k_B T_e}{\pi m}} \sigma_0 e^{-E_I/k_B T_e}, \quad (3.46)$$

onde  $k_B T_e$  é a energia do elétron,  $m$  é a massa do elétron,  $E_I$  é a energia de ionização, e  $\sigma_0$  é a seção atômica geométrica. Expressões específicas para os coeficientes de ionização foram dadas com base na teoria cinética quântica para plasmas densos [62].

Além da ionização direta, há também a chamada ionização em duas etapas (ou secundária), que consiste em uma colisão inelástica entre um elétron e um átomo, que entra em um estado excitado [60]. Há uma segunda colisão entre o átomo excitado e outro elétron, que acaba em um íon e dois elétrons. Outro processo é a fotoionização, pelo qual um elétron é ejetado de um átomo mediante a incidência de um fóton de alta energia. Nesse caso, a taxa correspondente tem uma expressão semelhante à (3.45), mas com a constante de ionização diferente. A ionização direta por impacto de elétrons é o processo dominante nas descargas de plasmas fracamente ionizados ou não térmicos, onde os campos e energias elétricos podem ser altos, mas o nível de excitação de espécies neutras é moderado [60]. Por outro lado, a ionização em duas etapas é importante principalmente em descargas térmicas, onde o grau de ionização e a concentração de espécies neutras excitadas são altas. Da mesma forma, a fotoionização é importante principalmente em plasmas térmicos. Assim, no que diz respeito aos plasmas não térmicos fracamente ionizados, a principal contribuição é da **ionização direta**.

Quando um elétron encontra um íon positivo, pode ocorrer um processo de recombinação, que diminui a densidade de partículas no plasma. O termo correspondente é um dissipador e a taxa de recombinação é proporcional ao produto entre elétrons  $n_e = n$  e densidades iônicas  $n_i = n$ ,

ou

$$Q^- = \left( \frac{\partial n}{\partial t} \right)_r = -k_r^{ei} n_a n^2 \equiv b n^2, \quad (3.47)$$

onde  $k_r^{ei} = \langle \sigma_{ei}^r(v) v \rangle$  é o coeficiente de recombinação que depende da seção transversal de recombinação  $\sigma_{ei}^r(v)$ .

Os processos de recombinação requerem uma interação de três corpos, ou seja, dois elétrons e um íon ou dois íons e um elétron. Em termos semi-clássicos, a recombinação consiste em duas fases: primeiro, há uma captura de um elétron livre por um íon carregado positivamente [60]. Isso corresponde a um estado altamente excitado do íon e é seguido por uma transição do elétron capturado para uma energia mais baixa através da emissão de um quantum de radiação ou de uma colisão com um elétron. O coeficiente de recombinação para três corpos diminui as funções da temperatura do elétron:

$$k_r^{ei}(T_e) = \frac{\sigma_0}{E_I} 10^{-14} \left( \frac{E_I}{k_B T_e} \right)^{9/2}, \quad (3.48)$$

onde  $\sigma_0$  é a seção transversal gás-cinética e  $E_I$  a energia de ionização, o processo inverso de fotoionização também pode ser considerado um processo de recombinação: um elétron é capturado por um íon e causa a emissão de um fóton associado à formação de um átomo neutro. A taxa de ionização correspondente também é dada por (3.47), mas com um coeficiente diferente. Em resumo, temos dois tipos de processos de reação: ionização, que atua como fonte, e recombinação, que atua como dissipador,

$$Q(n) = a n - b n^2. \quad (3.49)$$

Agora podemos escrever a equação não linear de reação-difusão, incluindo (3.49) em (3.44)

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D \nabla^2 n = n(a - b n). \quad (3.50)$$

### 3.6 Equação de Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov

A equação 3.50, com a não linearidade quadrática, é conhecida na literatura como equação Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov (Fisher-KPP) [20], escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \nabla^2 u = r u (1 - u), \quad (3.51)$$

onde  $u(x, t)$  é a densidade normalizada,  $D > 0$  é o coeficiente de difusão, e  $r > 0$  é a taxa de reação não linear.

A equação FKPP foi originalmente introduzida por Fisher, no contexto da genética, descrevendo a difusão de um gene vantajoso mutante com frequência  $n$ , o tempo é medido em número de gerações  $r$  é a intensidade da seleção em favor do gene mutante [20].

Na ecologia de invasão, Eq.(3.51) pode ser usado para modelar a difusão de espécies invasoras que se espalham para novos ambientes a uma velocidade constante [63]. Existem aplicações físicas em plasmas fracamente ionizados, bem como na propagação de chamas, cristalização e transições de fase [64].

Kolmogorov mostrou que Eq.(3.51) para  $x \in \mathcal{R}$ , admite soluções de ondas viajantes do formato  $u(x, t) = v(x \pm ct)$ , onde  $v$  é uma função crescente que tende a zero (unidade) se  $t$  tende a menos (mais) infinito, desde que  $c \geq 2\sqrt{rD}$  [65]. Observe-se que o lado direito da Eq.(3.51) desaparece para  $u(x, t) = 0$  e  $u(x, t) = 1$ , que representam soluções de equilíbrio. Ablowitz e Zeppetella obtiveram soluções analíticas para ondas viajantes com  $c = 5/\sqrt{6} \approx 2,04$  [66]. Griffiths e Schiesser apresentam uma variedade de soluções numéricas de ondas de deslocamento, incluindo também domínios limitados [67].

Nas próximas seções mostraremos que a equação FKPP é uma descrição válida para fenômenos espaço-temporais apresentados para plasmas fracamente ionizados na forma da equação de reação-difusão. Investigaremos nesta tese algumas soluções numericamente obtidas para a equação FKPP com condições de contorno fixas e para valores de parâmetros suficientemente grandes, onde para esses valores, há outras soluções além das ondas viajantes. Outra motivação é que, em uma versão pulsada do termo de reação na Eq. (3.51) conduz as redes de mapas quadráticos, objeto de intensa investigação devido ao seu rico comportamento dinâmico.

## Capítulo 4

# Discretização da equação diferencial parcial de reação-difusão

A obtenção da solução para a equação diferencial não linear (3.50) requer um processo numérico. Uma alternativa é considerar uma equação de reação-difusão pulsada em um espaço discretizado, que conduz a uma rede de mapas acoplados.

Vamos considerar que o termo de reação (fontes) atua apenas quando o tempo é um múltiplo inteiro de algum período  $\tau$ , isto é, o termo de reação é multiplicado pela somatória da função delta de Dirac .

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau), \quad (4.1)$$

tal que, a forma geral da equação de reação-difusão pulsada é [3]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\nabla^2 u = G(t)R(u), \quad (4.2)$$

onde  $u = n/n_0$  está normalizado pela densidade característica do plasma  $n_0$ . Como sabemos  $u(\mathbf{r}, t)$  é um campo escalar arbitrário.

Integrando a equação (4.2) sobre um intervalo infinitesimal  $[n\tau - \epsilon, n\tau +$



$\epsilon]$ ,

$$\begin{aligned}
\int_{n\tau-\epsilon}^{n\tau+\epsilon} \frac{\partial u}{\partial t} dt - D \int_{n\tau-\epsilon}^{n\tau+\epsilon} dt \nabla^2 u &= \int_{n\tau-\epsilon}^{n\tau+\epsilon} G(t) R(u) dt \\
u(\mathbf{r}, n\tau + \epsilon) - u(\mathbf{r}, n\tau - \epsilon) &= \int_{n\tau-\epsilon}^{n\tau+\epsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau) R(u(\mathbf{r}, t)) dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{kn} R(u(\mathbf{r}, t = k\tau - \epsilon)) \\
&= R(u(\mathbf{r}, t = n\tau - \epsilon)).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Agora integramos (4.2) entre dois sucessivos pulsos deltas, isto é, para  $n\tau + \epsilon < t < (n+1)\tau - \epsilon$ , onde  $G(t) = 0$ . A derivada do tempo em (4.2) pode ser discretizada usando o mesmo pulso de delta periódico, ou

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(\mathbf{r}, t = (n+1)\tau - \epsilon) - u(\mathbf{r}, t = n\tau + \epsilon)}{\tau}. \tag{4.4}$$

Usando (4.3), nós podemos escrever o segundo termo no primeiro termo, como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(\mathbf{r}, t = (n+1)\tau - \epsilon) - u(\mathbf{r}, t = n\tau - \epsilon) - R(u(\mathbf{r}, t = n\tau - \epsilon))}{\tau}. \tag{4.5}$$

## 4.1 Caso unidimensional

No caso unidimensional, entre os pulsos, a equação (4.2) é

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{4.6}$$

Discretizamos o espaço em  $N$  células de comprimento  $w$ , tal que  $x = iw$ , com  $i = 1, 2, \dots, N$ . Definimos a seguinte variável discreta:

$$u_n^{(i)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u(x = iw, t = n\tau - \epsilon), \tag{4.7}$$

tal que,  $x = iw$ , a derivada temporal (4.6) conduz

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{u(\mathbf{r}, t = (n+1)\tau - \epsilon) - u(\mathbf{r}, t = n\tau - \epsilon) - R(u(\mathbf{r}, t = n\tau - \epsilon))}{\tau} \\
&= \frac{u_{n+1}^{(i)} - u_n^{(i)} - R(u_n^{(i)})}{\tau}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

A derivada espacial pode ser discretizada da mesma maneira que (4.4), avaliada no tempo  $t = n\tau + \epsilon$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u((i+1)w, n\tau + \epsilon) - u((i-1)w, n\tau + \epsilon)}{2w}. \quad (4.9)$$

Usando (4.3) mais uma vez para avaliar o salto devido à função delta e da definição (4.7),

$$\begin{aligned} u((i+1)w, n\tau + \epsilon) &= u((i+1)w, n\tau - \epsilon) + R(u((i+1)w, n\tau - \epsilon)) \\ &= u_n^{(i+1)} + R(u_n^{(i+1)}), \end{aligned} \quad (4.10)$$

segue-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_n^{(i+1)} + R(u_n^{(i+1)}) - u_n^{(i-1)} - R(u_n^{(i-1)})}{2w}. \quad (4.11)$$

A segunda derivada espacial é discretizada semelhante a primeira

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u((i+1)w, n\tau + \epsilon) - 2u(iw, n\tau + \epsilon) + u((i-1)w, n\tau + \epsilon)}{w^2}, \quad (4.12)$$

e, como visto em (4.10), temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_n^{(i+1)} + R(u_n^{(i+1)}) - 2u_n^{(i)} - 2R(u_n^{(i)}) + u_n^{(i-1)} + R(u_n^{(i-1)})}{w^2}. \quad (4.13)$$

Substituindo (4.13) e (4.8) na equação (4.6) obtemos

$$\frac{u_{n+1}^{(i)} - u_n^{(i)} - R(u_n^{(i)})}{\tau} = D \frac{u_n^{(i+1)} + R(u_n^{(i+1)}) - 2u_n^{(i)} - 2R(u_n^{(i)}) + u_n^{(i-1)} + R(u_n^{(i-1)})}{w^2}. \quad (4.14)$$

Definindo  $f(u) = u + R(u)$  e  $\sigma^2 = D\tau/w^2$ , podemos agora escrever as redes de mapas acoplados

$$u_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(u_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} \left[ f(u_n^{(i+1)}) + f(u_n^{(i-1)}) \right], \quad (4.15)$$

onde  $\varepsilon \equiv 2\sigma^2$  é chamado de força de acoplamento

## 4.2 Redes de mapas acoplados do tipo reação-difusão

Como foi mencionado nas seções anteriores, para resolvermos a equação não linear de reação-difusão, é necessário a utilização de procedimentos numéricos.

Supondo que os termos de fontes (ionização e recombinação) atuem apenas de forma pulsada, podemos transformar a equação de difusão em redes de mapas acoplados usando o mesmo procedimento visto na seção anterior.

A equação do tipo reação-difusão no caso unidimensional, é dada por:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - D \nabla^2 u(x, t) = \alpha u(x, t) - \beta u(x, t)^2, \quad (4.16)$$

onde  $\alpha$  é o coeficiente de ionização,  $\beta$  o coeficiente de recombinação,  $u(x, t)$  a densidade do plasma e  $D$  o coeficiente de difusão.

Transformado a equação (4.16) em redes de mapas acoplados, temos

$$u_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon) f(u_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} \left[ f(u_n^{(i+1)}) + f(u_n^{(i-1)}) \right], \quad (4.17)$$

para

$$\begin{aligned} f(u) &= u + \alpha u - \beta u^2, \\ \varepsilon &= 2D\tau/w^2, \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde  $n$  é o tempo discretizado,  $i$  os sítios,  $u$  a variável de estado que representa a densidade do plasma e  $\varepsilon$  a força de acoplamento(difusão).

Nesse trabalho, consideramos a condição de contorno fixa igual a zero, ou seja, nosso plasma está limitado dentro de uma fronteira, tal que na fronteira sua densidade é nula.

O estudo da dinâmica das redes mapas acoplados, a partir de simulações numéricas, nos mostra características qualitativas muito interessantes como, por exemplo, o caos espaço-temporal.

Nas redes de mapas acoplados para a equação de reação-difusão são observados as seguintes sucessões de padrões: duplicações de *kinks*, padrão aleatório congelado, seleção de padrão, intermitência espaço-temporal e caos espaço-temporal completamente desenvolvido. Uma vez que somente dois parâmetros controlam a dinâmica dos mapas ( $\alpha$  e  $\varepsilon$ ), podemos plotar o diagrama de fase (Fig. 4.1) variando  $\alpha$  e  $\varepsilon$ , mantendo  $\beta$  constante. Esse diagrama é feito variando  $\alpha$  de 2,55 à 3,00 e o  $\varepsilon$  de 0,0 à 0,5 com  $\beta = 0,1$ , a partir de condições iniciais aleatórias com um transiente

de 10 000 iteradas e sobreposição de 200 iteradas, considerando um mapa acoplado com 100 sítios e condição de contorno fixa igual a zero.

É observado na Fig 4.1, a formação de quatro categorias de padrões, os quais, serão vistos com mais detalhes logo abaixo. A região I é o padrão aleatório congelado, a região II é a seleção de padrão, região III é a formação de defeitos caóticos, região IV é a intermitência espaço-temporal e por último a região V é o caos espaço-temporal completamente desenvolvido, os números (2,4,8) representam os períodos selecionados. Esse diagrama é semelhante ao diagrama feito por Kaneko para o mapa logístico [24].

Podemos observar que, os defeitos caóticos e a intermitência espaço-temporal ocorre somente em pequenas regiões com acoplamento fraco, para acoplamento mais forte, a partir de  $\varepsilon = 0,15$ , praticamente temos somente três regiões (I,II,V), onde há uma diminuição dos sítios caóticos conforme aumentamos a força de acoplamento. Esta relação entre o caos e o acoplamento sera visto mais adiante.

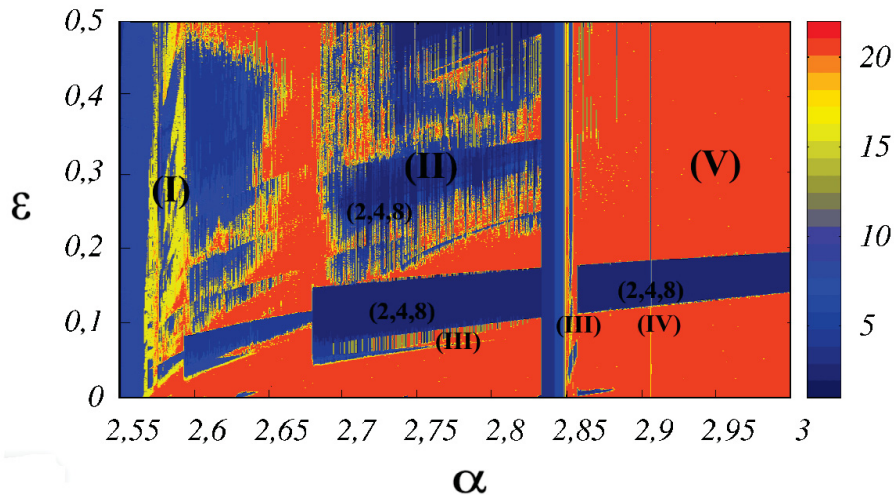


Figura 4.1: Diagrama de fase normalizado(em escala de cores), de uma rede de mapas acoplados do tipo reação-difusão, com condições iniciais aleatórias, após um transiente de  $n=10\,000$ ,  $N=100$ ,  $\beta = 0,1$ , com 200 iteradas após o transiente e condição de contorno fixas igual a zero. Para cada par de  $(\alpha, \varepsilon)$  obtemos a média dos períodos da rede, mostrando a dinâmica dominante.

A região I é o padrão aleatório congelado, a região II é a seleção de padrão, região III é a formação de defeitos caóticos, região IV é a intermitência espaço-temporal e por último a região V é o caos espaço-temporal completamente desenvolvido.

### 4.3 Formação de padrão

Como o mapa do tipo reação-difusão apresenta oscilações de período  $2^n$  [26], é relevante estudar a fase das oscilações em relação ao movimento do período 2. Por exemplo, no parâmetro de movimento de período 2 cada sítio da rede apresenta o mesmo movimento, mas as fases de oscilações não necessariamente são iguais. Vários domínios são formados onde os elementos oscilam dentro e fora de fase com os domínios vizinhos.

De modo geral, para a região de período  $2^k$ , todos os sítios da rede em um domínio têm a mesma fase de oscilação. Os domínios são separados por *kinks* [25] que se desenvolvem em locais cujas amplitudes estão próximas a pontos periódicos instáveis de período  $2^{k-1}$ . Assim como no caso do mapa isolado, as redes de mapas acoplados também exibem duplicações de períodos *kinks* conforme aumentamos a não linearidade.

Ao aumentarmos a não linearidade  $\alpha$ , domínios de vários tamanhos são formados e após uma cascata de duplicações o sistema exhibe um comportamento caótico.

Devido à dependência sensível das condições iniciais, que é característica de sistemas caóticos, um estado homogêneo torna-se instável com componentes caóticos, e estruturas de domínios são espontaneamente criadas pelo caos, como mostrado na Fig. 4.2(a).

Uma característica notável para os sistemas espacialmente estendidos é a bifurcação espacial. Mesmo que a dinâmica em si seja homogênea, o estado local das redes pode diferenciar de sítio para sítio [24]. Na Fig. 4.2(a), há movimento caótico em grandes domínios, enquanto, há praticamente período-8 em domínios menores, período-4 para domínios muito menores e período 2 para menores ainda.

A bifurcação espacial pode ser descrita da seguinte maneira: como já notado, os *kinks* passam através dos pontos de selas que são separatrizes de duas regiões que estão fora de fase, isto é, os *kinks* estão numa região de ponto fixo instável.

A dinâmica em um domínio pode ser aproximada pela dinâmica de um pequeno sistema, com condições de contorno fixas em ambas as extremidades; especificamente, fixado no valor dos pontos instáveis. Quanto mais estreito o domínio, mais altamente restringida a dinâmica e simples o comportamento, assim, em função do tamanho do domínio, temos uma sequência de bifurcações para um comportamento mais complexo ao caos.

Naturalmente, a substituição de um domínio por um sistema finito é uma aproximação. Em princípio, os *kinks* podem se mover ou os domínios podem afetar um ao outro como ocorre, por exemplo, na propagação dos defeitos caóticos Fig. 4.3(c).

### 4.3.1 Padrões aleatórios congelados

Os "padrões aleatórios congelados", são padrões fixos no tempo, onde seus atratores são aleatórios no espaço e dependem das condições iniciais. O número de atratores aumenta exponencialmente com o tamanho do sistema [24] (Fig. 4.2(a)).

Plotando o diagrama espaço-tempo (Fig. 4.3(a)), podemos observar que no início das interações há uma grande quantidade de domínios caóticos que com o decorrer do tempo diminui. Mesmo após essa diminuição, ainda há grandes domínios com movimento caótico e alguns domínios menores, com movimentos periódicos. Passado esse transiente, as fronteiras desses domínios se tornam fixas no espaço e no tempo, permanecendo assim. Esses padrões são ditos estacionários porque, passado o transiente, não há mais alterações no tamanho dos domínios com o decorrer das iterações, bem como da posição dos *kinks*.

### 4.3.2 Seleção de padrão com supressão de caos

Conforme aumentamos o valor de  $\alpha$ , mantendo  $\varepsilon$  e  $\beta$  constantes, algumas fronteiras dos domínios começam a ser mover. Através desse movimento, domínios de alguns tamanhos são selecionados. Podemos ver essa seleção nas Fig. 4.2(b).

Aumentando ainda mais o coeficiente de ionização, o número de possíveis padrões diminuem e apenas 1-3 são selecionados. Essa seleção é tal que, os tamanhos selecionados apresentam movimentos com curtos períodos. Isso pode ser visto na figura 4.2(c), onde seu movimento é praticamente movimento com período 2. Depois da seleção, a posição dos domínios é congelada e eles se tornam estacionários (Fig. 4.3(b)).

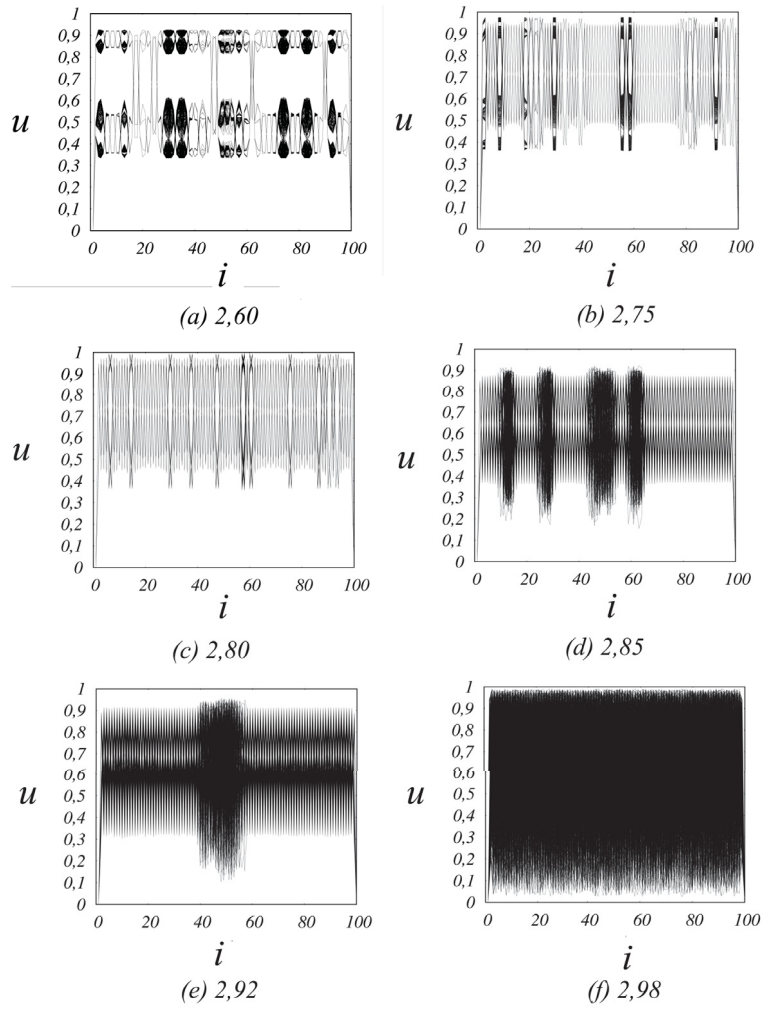


Figura 4.2:  $u_n^i \times i$  com condições iniciais aleatórias e condição de contorno fixa igual a zero para 100 sítios, após transiente de 10 000 iterações, é realizada uma sobreposição de 200 iterações com acoplamento de  $\varepsilon = 0,1$  e  $\beta = 0,1$ , onde a densidade está normalizada no valor máximo. (a) Padrão aleatório congelado; (b) Seleção de padrão; (c) Seleção de padrão; (d) Defeitos caóticos, (d) Intermitência espaço-temporal e (f) Caos espaço-temporal completamente desenvolvido.

Na fase de padrão aleatório congelado (Fig. 4.2(a)), o caos é contido em alguns grandes domínios, mas conforme aumentamos o valor de  $\alpha$ , há uma diminuição desses domínios caóticos. Por exemplo, na Fig. 4.2(b) há uma diminuição desses domínios em relação a Fig.4.2(a), em contrapartida, na Fig. 4.2(c) diminui ainda mais. Esse processo é chamado de supressão do caos. Isso fica bem evidenciado quando calculamos o espec-

tro de Lyapunov (Fig 4.4(a)), onde é observado uma diminuição dos sítios caóticos conforme aumentamos o valor de  $\alpha = 2,70$  até  $\alpha = 2,80$ . A partir desse valor os sítios caóticos voltam a aumentar.

Na Fig 4.2(b) nota-se uma estrutura na forma de “zigue-zague” com movimento de período 2, na Fig. 4.2(c) esse movimento é ainda mais acentuado. Como essa supressão do caos é muito mais forte na figura 4.2(c) do que na figura 4.2(b), podemos concluir que a seleção de padrão ocorre sempre no sentido de favorecer o movimento temporal mais simples com menor expoente de Lyapunov. No diagrama espaço-tempo, vemos na Fig.4.3(b) uma diminuição dos domínios caóticos, conforme iteramos no tempo, surgindo grandes domínios com movimentos regulares na forma de zigue-zague e após a seleção de padrão, essas estruturas de zigue-zague se tornam estacionárias com praticamente sem domínios caóticos, existindo somente movimento simples de baixo período e constante no tempo. As estruturas em zigue-zagues são importantes porque podem levar a uma rota de quase periodicidade para o caos.

Aumentando ainda mais a não linearidade, há o surgimento de regiões caóticas localizadas no padrão em zigzag (Fig.4.3(c)), esses “defeitos caóticos” são localizados no espaço e suas formas mudam no tempo. A oscilação de um defeito é caótica, sendo confirmado pela existência de expoentes de Lyapunov positivos (Fig 4.4(b)). Na seleção de padrão, a estrutura zigue-zague é fixa no espaço e apresenta temporalmente período dois. Já na difusão de defeitos, o padrão zigue-zague é modulado quase periodicamente no tempo e os defeitos podem mover-se no espaço, bem como mudar de tamanho e quantidade.

A partir de um certo valor de  $\alpha$  esses defeitos caóticos começam a se fundirem na forma de umas "explosões" na rede, como visto na Fig. 4.2(e) e 4.3(d), esse caos aparentemente localizado espalham por toda a rede até chegar ao caos espaço-temporal totalmente desenvolvido (Fig. 4.2(f) e 4.3(e)). Esse padrão onde os domínios não são mais estáveis e começa a colapsar é chamado de intermitência espaço-temporal.

A supressão do caos, observado até agora, é resultado do processo de difusão. A difusão sempre tende a tornar o sistema homogêneo, enquanto o movimento caótico faz o sistema não ser homogêneo devido à sensível dependência nas condições iniciais. Estas duas tendências são conflitantes e o padrão com o menor expoente de Lyapunov é selecionado [25].

Por outro lado, não havendo conflitos nos domínios de movimento quase periódico, em que o cancelamento dessas duas tendências acima leva a um padrão simples. Nesse sentido denominou [24] a presente fase como "padrão de reação através do caos transitório e difusão". Após a seleção, o padrão do domínio é fixo e não se move no espaço.



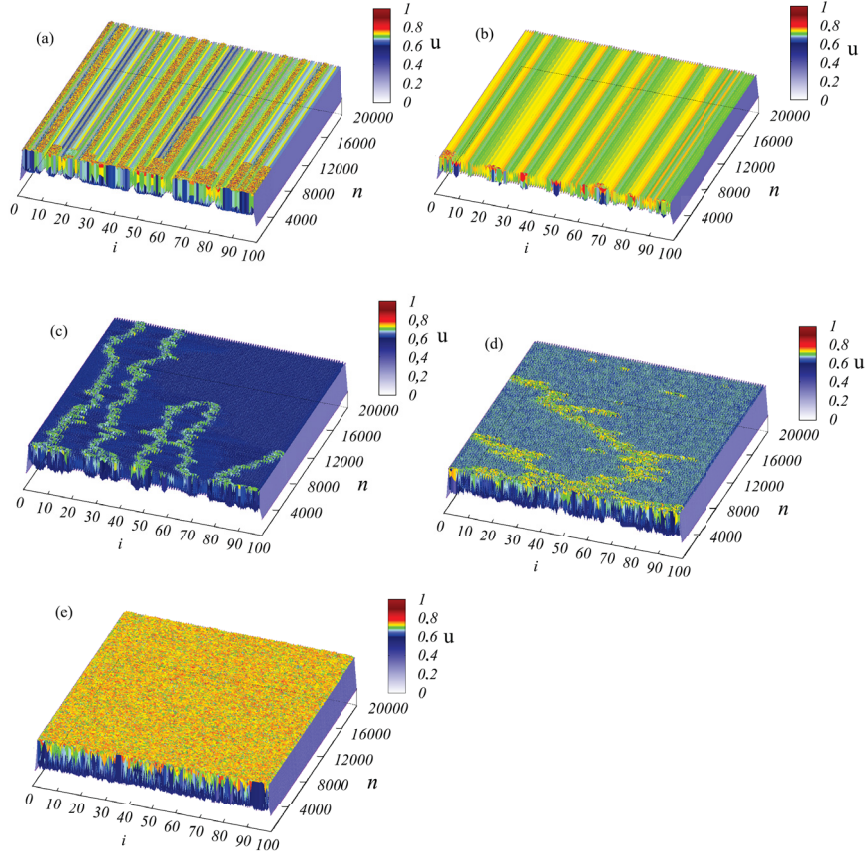


Figura 4.3: Diagrama espaço-tempo com 100 sítios para com condições iniciais aleatórias, condição de contorno fixas igual a zero , após um transiente de  $n=5000$ , com  $\varepsilon = 0,1$  e  $\beta = 0,1$ , onde a densidade está normalizada no valor máximo. (a)  $\alpha = 2,7$ ; (b)  $\alpha = 2,8$ ; (c)  $\alpha = 2,85$ ; (d)  $\alpha = 2,92$  e (e)  $\alpha = 2,95$

Para um acoplamento mais forte, a partir de  $\varepsilon = 0,15$ , essas mudanças ocorrem de maneira mais simples, onde com o aumento da não linearidade, não há mais formação de defeitos caóticos localizados, somente padrão aleatório congelado com surgimento de estruturas de zigzag e supressão do caos, levando ao caos espaço-temporal completamente desenvolvido Fig. 4.1.

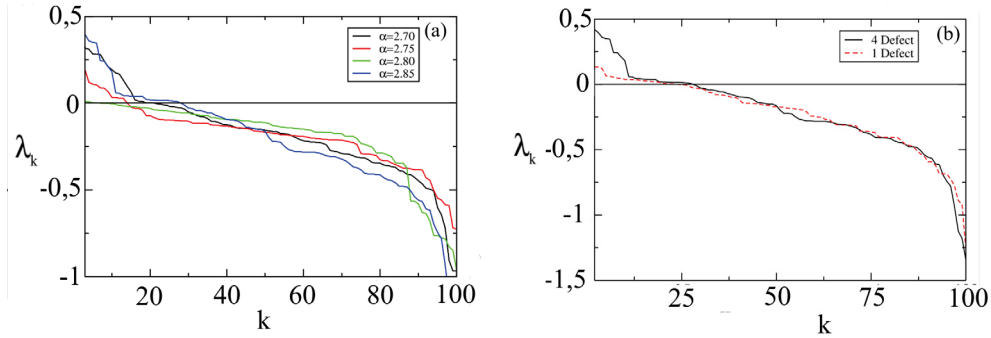


Figura 4.4: Espectro de Lyapunov para  $\beta = 0,1$  e 100 sítios, após um transiente de  $n = 10000$ . (a) Variamos  $\alpha$  mantendo os outros parâmetros constantes. (b) Espectro de Lyapunov com  $\varepsilon = 0,1$  e  $\alpha = 2,85$ , onde 1 se refere a um só defeito na rede e 4 refere-se a 4 defeitos na rede

### 4.3.3 Variação da dinâmica do sistema em função do coeficiente de difusão e recombinação

#### Coeficiente de difusão

O diagrama isoperiódico (Fig.4.1) não é capaz de diferenciar entre períodos altos de atratores caóticos, por esse motivo, completamos nossa análise pelo cálculo do espectro de Lyapunov  $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ . A soma normalizada dos expoentes positivos de Lyapunov é uma estimativa numérica para a densidade da entropia de Kolmogorov-Sinai (KS)  $h$  mostrada em Fig.4.5. A partir da (KS) podemos entender melhor a dinâmica entre o coeficiente de difusão e a não linearidade.

A difusão do plasma sempre age no sentido de deixá-lo homogêneo, já o coeficiente de ionização, como visto anteriormente, após um certo valor, produz varias regiões caóticas, conduzindo o plasma a regime totalmente "turbulento". Isso fica bem claro na Fig 4.5, onde plotando a entropia KS, variando  $\alpha$  e  $\varepsilon$  com  $\beta$  constante, após um transiente de 10 000 iteradas.

Nesse gráfico, o conflito entre esses dois coeficientes é bem evidenciado, ou seja, para um dado valor de  $\alpha$  ao aumentarmos o valor do acoplamento, há uma tendência na diminuição da entropia KS. Por exemplo, para um valor fixo de  $\alpha$ , a densidade da entropia tem seu valor máximo quando consideramos o acoplamento igual a zero. Agora se considerarmos acoplamento igual a 0,5, vemos uma grande diminuição dessa entropia. Isso ocorre pelo seguinte motivo: como a rede possui um acoplamento forte, cada mapa é influenciado um pelo outro levando há uma diminuição da disparidade entre eles, ao contrário do primeiro caso, onde não há

nenhum acoplamento, ou seja, cada mapa age isoladamente e independe do comportamento do outro mapa. Para exemplificar, vamos tomar o valor da não linearidade igual a 3. Nesse valor, se olharmos para a Fig. 4.5, notamos que a entropia tem seu valor próximo de 0,5 para  $\varepsilon = 0$ . Para esse mesmo valor de  $\alpha$ , quando pegamos o valor de  $\varepsilon = 0,5$ , temos uma entropia entorno de 0,02, ou seja, há uma maior uniformidade na rede. Essa tendência segue para todos os valores de  $\alpha$ .

Um ponto interessante é que essa diminuição da entropia não é uniforme, ou seja, para alguns valores de  $\alpha$  são observados pequenos aumentos da densidade numa espécie de pequenas “cadeias de montanhas”, principalmente para valores de ( $\alpha = 2,6$  à  $\alpha = 2,85$ ) e ( $\varepsilon = 0$  à  $\varepsilon = 0,3$ ). Por exemplo, vamos considerar a região com  $\varepsilon = 0,1$ , variando  $\alpha$  de 2,5 à 3. Até o valor de  $\alpha = 2,57$  há a formação de uma região periódica com entropia é igual a 0 (cor branca), a partir desse valor, observamos uma tendência no aumento da entropia até próximo de  $\alpha = 2,75$ . Na região onde surge os padrões em zigue-zague ( $\alpha = 2,75$  à  $\alpha = 2,8$ ) há novamente a diminuição da entropia para valores próximo de zero voltando a aumentar a partir de  $\alpha = 2,80$  com um pico em  $\alpha = 2,85$ , após esse pico, a entropia praticamente não varia mais.

Podemos observar que a região onde ocorre a supressão do caos (padrões em zigzag) fica localizada em uma espécie de “vala” (regiões brancas e azul claras) com valores de  $h = 0$  e  $h = 0,001$  respectivamente e como já sabemos, esses padrões possuem movimentos simples com períodos entorno de (2,4,8).

Mesmo nessas “valas”, para alguns valores específicos de não linearidade e acoplamento, é possível observar algumas ramificações com entropia mais alta com o valor de densidade entorno de 0,01 (azul).

Observamos três regiões com essas características de “vala” na Fig. 4.5, uma pequena com valores aproximados de ( $\varepsilon = 0,01$  à 0,05) e ( $\alpha = 2,57$  à 2,58), outra região maior com valores aproximados de ( $\varepsilon = 0,025$  à 0,1) e ( $\alpha = 2,59$  à 2,66) e uma região maior ainda com valores aproximados de ( $\varepsilon = 0,03$  à 0,18) e ( $\alpha = 2,67$  à 3). Na última região, vemos que há uma área que a cruza com uma entropia mais elevada, entorno de 0,1 (laranja). Essa região para  $\varepsilon = 0,1$  e  $\alpha = 2,85$  é onde ocorre a formação dos defeitos. Ela se estende de  $\varepsilon = 0$  à  $\varepsilon = 0,35$  para  $\alpha = 2,85$ . A partir dela, temos uma variação da densidade mais uniforme (sem formação de “valas” e “montanhas”).

Uma questão importante é, que se compararmos esse gráfico da entropia KS com o diagrama de fase, todas as formações de padrões podem ser vista em ambos os gráficos.

## Coefficiente de recombinação

A Fig. 4.6, mostra a variação da densidade normalizada do plasma em função do coeficiente de recombinação em escala logarítmica. Esse gráfico é feito após um transiente de 10000 iteradas com  $\varepsilon = 0,1$  variando  $\alpha$  de 2,5 a 3. Para cada valor de  $\alpha$  variamos  $\beta$  de 0,001 a 1,0.

Primeiramente, observamos que a densidade do plasma diminui de forma exponencial em função do coeficiente de recombinação  $\beta$ . Essa variação é dada pela função  $u = 0,001\beta^{-1}$  para  $\varepsilon$  e  $\alpha$  constante. Essa função é independente do valor de  $\alpha$  e do acoplamento.

Como podemos notar, diferentemente dos outros coeficientes, a recombinação do plasma, nesse modelo, não influencia na dinâmica do sistema, atuando apenas de forma quantitativa na sua densidade.

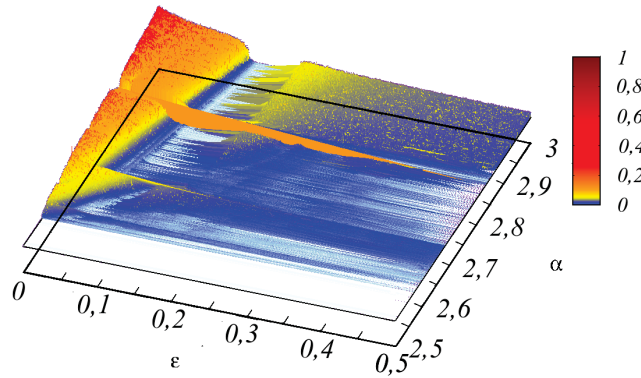


Figura 4.5: Diagrama de densidade da entropia Kolmogorov-Sinai (em escala de cores), variando o  $\alpha$  de 2,55 à 3,00 e o  $\varepsilon$  de 0,0 à 0,5 com  $\beta = 0,1$  e 100 sítios.

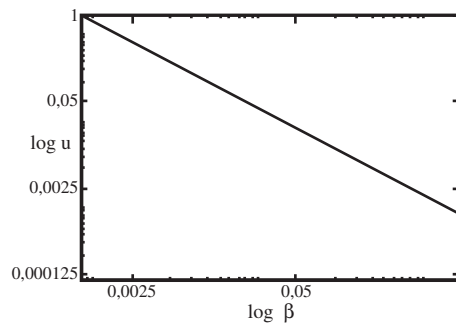


Figura 4.6: Gráfico da densidade do plasma ( $u$ ) em função de  $\beta$ , após um transiente de  $n = 10\,000$ , para  $\varepsilon = 0,1$  e 100 sítios, onde a densidade está normalizada no valor máximo e em escala logarítmica.

## 4.4 Defeitos caóticos

A região no diagrama de fases, relacionada à presença de defeitos caóticos, é marcada por uma diminuição global do valor de  $\lambda$  em relação às regiões onde o caos espaço-temporal domina. Essa diminuição global é devida ao fato de que a maior parte da rede é ocupada por padrões em zig-zag e somente em seus limites são formados por defeitos caóticos de tamanho espacial limitado. Para ficar mais claro, vamos primeiramente calcular o espectro de Lyapunov com somente um defeito na rede, após isso, voltamos a calcular o espectro de Lyapunov para uma rede com quatro defeitos, plotando o gráfico desses valores Fig. 4.4(b), fica evidenciado que o caos na rede é proporcional ao número de defeitos, ou seja, quanto maior o número de defeitos, maior o valor positivo do expoente de Lyapunov. A partir desse espectro, notamos também que o caos da rede está realmente contido dentro dessas regiões, e os sítios fora dessas regiões, possuem expoente negativo e por tanto movimento periódico numa estrutura de zigue-zague como foi visto anteriormente Fig.4.3(b).

Em particular, para  $\varepsilon = 0,1$  e  $\alpha = 2,85$ , observamos no gráfico espaço-temporal representado na figura 4.3(c) a formação de defeitos caóticos movendo-se com o tempo de maneira irregular [Fig. 4.7(a)]. Dois defeitos podem colidir e aniquilar-se mutuamente ou um defeito pode colidir com alguns limites e desaparecer. Por qualquer motivo, espera-se que o número de defeitos decaia para zero com o tempo. Com a não linearidade crescente, esses defeitos se tornam maiores e seus limites se tornam mais nebulosos, permitindo movimentos caóticos em uma faixa espacial mais ampla, com alternâncias entre comportamentos ordenados e desordenados no espaço e no tempo (intermitência espaço-temporal Fig 4.3(d)).

Como mostrado na Fig. 4.7(b), o número de defeitos caóticos aumenta com o tamanho da rede(em tempo fixo). Com esse aumento exibindo uma tendência linear, segue-se que a densidade de defeitos caóticos varia de 5% a 10% de toda a rede. Por outro lado, devido às colisões com os limites e consigo mesmo, espera-se que a vida útil dos defeitos decaia com o tempo. A vida útil média, por outro lado, também varia com o tamanho da rede.

Os defeitos caóticos se difundem ao longo da rede, de maneira semelhante às partículas brownianas, conforme revelado na Fig. 4.7 (c). Uma forma de caracterizar esse movimento é com a utilização do deslocamento quadrático médio definido como:

$$\langle \delta^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^n - x_i^0)^2, \quad (4.19)$$

calculado para cada instante de tempo  $n$ ,  $x_i^0$  representa a posição inicial do defeito em cada amostra e  $N$  é o número de amostras. Utilizamos uma rede de mapas ( $N = 6000$  sítios) com  $N_D = 260$  defeitos de amostra, sobre os quais a média foi calculada. Os dados podem ser ajustados pela expressão  $\langle \delta^2 \rangle = 2Dn$  válido para difusão gaussiana, correspondendo microscopicamente a uma caminhada aleatória, onde  $D \approx 1,25$  é um coeficiente de difusão para os defeitos. Ao longo da faixa de valores  $\alpha$  que apresentam defeitos caóticos, descobrimos que seu coeficiente de difusão varia entre 1,0 e 1,4, como mostra a Fig. 4.7 (d). Nossos resultados são qualitativamente semelhantes aos de Kaneko, que considerou um mapa diferente [25].

A partir de uma inspeção superficial da Figura 4.7(a), a evolução de um defeito caótico se assemelha a um movimento browniano de uma partícula passando por um passeio aleatório. Esta observação é ainda confirmada pela difusão gaussiana observada em um conjunto de tais defeitos. Outra caracterização da dinâmica temporal de um defeito é fornecida por técnicas baseadas em recorrência, que têm sido usadas em análises de dados não lineares [68, 69]. Esses resultados foram publicados em [29], ao qual apresentamos no apêndice A.

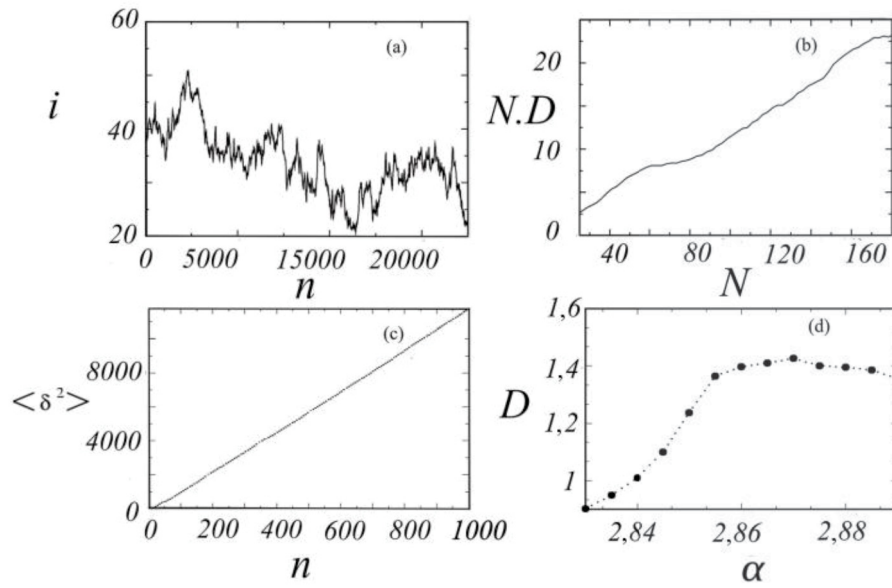


Figura 4.7: (a) Série temporal do movimento de um defeito individual para  $\alpha = 2,85$ ,  $\beta = \varepsilon = 0,1$ . (b) Número de defeitos caóticos em função do tamanho da rede para  $\alpha = 2,85$  e  $\varepsilon = \beta = 0,1$ . (c) Deslocamento quadrático médio dos defeitos caóticos em função do tempo para redes de mapas de  $N = 6000$  com  $\alpha = 2,85$ ,  $\beta = \varepsilon = 0,1$ . Esses dados podem ser ajustado pela expressão linear  $\langle \delta^2 \rangle = 2Dn$ . (d) Coeficiente de difusão dos defeitos em função do parâmetro de não linearidade  $\alpha$  com  $\varepsilon = \beta = 0,1$ . Para cada valor de  $\alpha$ , obtemos o coeficiente de difusão pela expressão  $\langle \delta^2 \rangle = 2Dn$ .



## Capítulo 5

### Equação de reação-difusão

Como já foi visto, para transformar a equação não linear de reação-difusão em redes de mapas acoplados foi necessário considerar o seu termo de reação como sendo um termo pulsado e com o período de pulsação igual para ambos os termos de fontes (ionização e recombinação). Um questionamento importante a ser feito sobre essa abordagem é: quão boa é essa aproximação quando consideramos que os termos de recombinação e ionização possuem a mesma frequência de colisão? Outra pergunta pertinente a se fazer também é: essa mesma dinâmica encontrada nas redes de mapas acoplados é obtida quando integramos a equação não linear de reação-difusão diretamente? Isto é, conseguimos encontrar esses mesmos padrões dinâmicos integrando diretamente a equação propriamente dita?

Para responder principalmente a última pergunta, temos que empregar outro método numérico, no qual, possamos integrar diretamente a equação não linear de reação-difusão sem precisar assumir que o termo de reação atua em pulsos periódicos, ou seja, sem utilizar os mapas quadráticos.

O método muito utilizado para integração de equações diferenciais parciais na literatura é o método de diferenças finitas. A principal diferença entre essas duas abordagens, está na forma da discretização do tempo. Por exemplo, ao discretizarmos o tempo nos mapas, ele assume valores inteiros, e toda a informação contida entre esses intervalos fica inacessível. No caso da integração direta, a discretização do tempo ( $\Delta t$ ) pode assumir valores tão pequenos quanto desejarmos, e com isso, recuperar grande parte da informação perdida nos mapas acoplados. Mas há um porém: quanto menor o intervalo de tempo, mais lento será a simulação numérica, precisando de maior processamento computacional do que a utilizada para a simulação em mapas. Outra dificuldade que surge é: utilizar métodos numéricos para resolver equações diferenciais parciais não



lineares não são muito triviais. Um grande problema são as instabilidades na hora da integração dependendo do passo utilizado, e principalmente instabilidade nas coordenadas espaciais quando aplicamos a discretização espacial no regime caótico, onde dependendo do método de diferença finita, a dinâmica será muito sensível ao intervalo de integração espacial.

Nesse capítulo a solução numérica será obtida, integrando diretamente a equação não linear de reação-difusão, através da metodologia de diferenças finitas. Também será comparada a dinâmica obtida pela integração da equação com os resultados obtidos na rede de mapas acoplados, principalmente no regime de intermitência espaço-temporal.

## 5.1 Equação reação-difusão não linear unidimensional

Considere a versão unidimensional da equação não linear de reação-difusão,

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} = n(x, t)(a - bn(x, t)) \quad (5.1)$$

onde o plasma está confinado por paredes metálicas em  $x = 0$  e  $x = l$ , correspondendo à condição de contorno:

$$n(x = 0, t) = n(x = l, t) = 0. \quad (5.2)$$

Se negligenciarmos o coeficiente de difusão, a equação diferencial resultante tem uma solução elementar,

$$n(D = 0, t) = \frac{aC}{e^{-at} + bC} \quad (5.3)$$

onde a constante de integração é expressa em termo da condição inicial  $n(t = 0)$ .

$$C = \frac{n(t = 0)}{a - bn(t = 0)} \quad (5.4)$$

tal que, se  $a > 0$ , para grandes períodos de tempo, a densidade tende para valores estacionários  $n_0 = a/b$ .

Em plasmas experimentais fracamente ionizados com menos de 0.1% de ionização [32] a densidade característica é da ordem de  $n_0 \approx (10^9 - 10^{10})cm^{-3}$ . Para os coeficientes de recombinação e ionização desses plasmas, seus valores físicos são respectivamente da ordem de  $a \approx 10^{-6}s^{-1}$  e

$$b \approx 10^{-16} \text{cm}^3/\text{s}.$$

Considerando também o tempo característico  $t_0$ . Podemos agora definir as seguintes variáveis de normalização:  $u = n/n_0$ ,  $\rho = x/l$  e  $\tau = t/t_0$ , de tal maneira que, a equação reação-difusão pode ser reescrita na forma

$$\frac{\partial u(\rho, \tau)}{\partial \tau} - \varepsilon \frac{\partial^2 u(\rho, \tau)}{\partial \rho^2} = \alpha u(\rho, \tau)(1 - u(\rho, \tau)) \quad (5.5)$$

onde temos apenas dois parâmetros para variar ( $\alpha = a^2 t_0$  e  $\varepsilon = D t_0 / l^2$ ). Essa equação também é conhecida na literatura como equação de Fisher-KPP [20].

Os valores típicos do comprimento característico do plasma e do coeficiente de difusão são da ordem de  $l \approx 10^2 \text{cm}$  e  $D \approx 10^{-6} \text{cm}^2/\text{s}$ , respectivamente.

Como já mencionado, o método bastante utilizado para equações diferenciais parciais é o método de diferenças finitas. A ideia básica é o processo de discretização, que reduz o problema contínuo, com um número infinito de variáveis, em um problema discreto com um número finito de variáveis, podendo ser resolvido computacionalmente [70].

O método das Diferenças Finitas é basicamente dividido em três métodos, são eles: método explícito, método implícito e o método de Crank — Nicholson utilizado por Ernest e Kerr [14]. Nessa tese utilizaremos somente o método implícito, o qual melhor se adaptou a nossa equação na precisão e, principalmente, na estabilidade nos regimes turbulentos [70, 71].

## 5.2 Modelagem numérica da equação não linear de reação-difusão unidimensional

### 5.2.1 Método das Diferenças Finitas (MDF)

O método numérico das diferenças finitas é usado como uma abordagem alternativa para obter a aproximação da solução de uma equação diferencial parcial. A ideia básica desse método é transformar a resolução de uma equação diferencial em um sistema de equações algébricas, substituindo as derivadas por diferenças [72].

Ele consiste na discretização do domínio e na substituição das derivadas presentes na equação diferencial por aproximações, utilizando apenas os valores numéricos da função. A ferramenta básica no cálculo das aproximações das derivadas é a fórmula de Taylor [70].

### 5.2.2 Discretização

A primeira etapa para resolução de qualquer método numérico envolvendo as equações diferenciais parciais é discretizar a região onde se procura a solução. Para a discretização define-se uma malha, que é um conjunto finito de pontos pertencentes ao domínio, chamados nós da malha

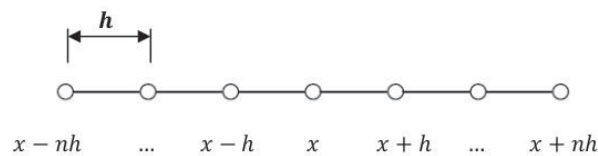


Figura 5.1: Malha computacional uni-dimensional (Fonte: MELO, 2011, p.18.)

A Fig 5.1 representa uma malha unidimensional uniforme, onde o espaçamento da malha é igual para cada intervalo e é representado por  $h$ . A Fig 5.2 representa uma malha cartesiana ortogonal uniforme para um problema bidimensional. Qualquer ponto  $(x_i, y_i)$  fica representado na malha por  $(i, j)$  e os vizinhos a esse ponto vem representados por  $(i \pm 1, j \pm 1)$ .

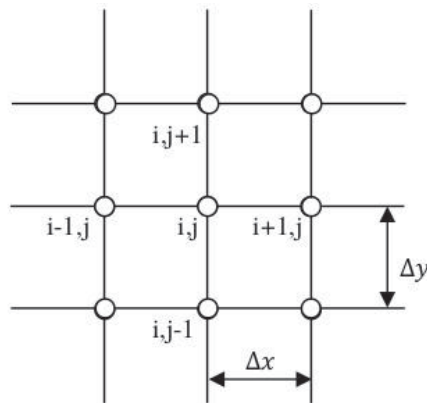


Figura 5.2: Malha computacional bi-dimensional (Fonte: MELO, 2011, p.18.)

Uma vez efetuada a discretização do domínio do problema, aplica-se o MDF (Método das Diferenças Finitas) para a determinação das incógnitas. As derivadas que aparecem na equação original, são substituídas (ou aproximadas) por fórmulas discretas de diferenças. A aplicação dessas fórmulas aos pontos do domínio discretizado gera um sistema de equações

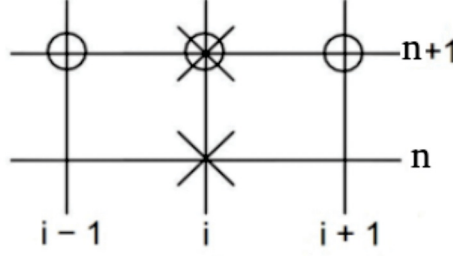
algébricas, cuja solução fornece os valores das incógnitas do problema nesses pontos discretos.

Sendo assim, nos métodos baseados em diferenças finitas completas, o domínio da equação é substituído por uma malha de pontos, as derivadas são aproximadas por diferenças finitas, e assim procuram-se soluções numéricas na forma de uma tabela de valores aproximados em determinados pontos do espaço e do tempo.

A exatidão da solução vai depender das dimensões dos passos escolhidos para o espaço e para o tempo. Substituindo todas as derivadas parciais por diferenças finitas que resulta num sistema de equações algébricas, o sistema poderá ser linear ou não, dependendo do tipo de EDP subjacente ao problema. Nos problemas de valor inicial, a solução é obtida partindo de valores iniciais e avançando no tempo passo a passo, gerando uma sucessão de linhas na tabela da solução. Os procedimentos baseados em passos de tempo podem ser explícitos ou implícitos, dependendo da fórmula do valor solução usa-se ou não apenas informação relativa aos pontos do passado.

### **5.3 Aplicação do Método Implícito na Equação de reação-difusão**

O Método Implícito é estável, ou seja, o passo de tempo é independente da resolução espacial da grade adotada. Deve-se salientar que a estabilidade garantida pelo método implícito não garante a precisão dos resultados, pois esta depende da discretização espacial, do passo de tempo e das condições de contorno adotadas. Além disso, ele gera um amortecimento nos resultados.



(a)

Figura 5.3: A aproximação da derivada espacial é feita no tempo avançado  $n + 1$ .

A primeira derivada no tempo pode ser representada utilizando a Diferença Progressiva, expressa da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta \tau} \quad (5.6)$$

Enquanto que a aproximação da segunda derivada no espaço é representada da seguinte maneira:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta \rho^2} \quad (5.7)$$

Substituindo (5.6) e (5.7) em (5.5), obtemos

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta \tau} = \varepsilon \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta \rho^2} + \alpha u_i^n (1 - u_i^n) \quad (5.8)$$

Rearranjando os termos

$$u_i^{n+1} = m(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + \Delta \tau \alpha u_i^n (1 - u_i^n) + u_i^n \quad (5.9)$$

onde podemos definir  $m = \varepsilon \Delta \tau / \Delta \rho^2$ . Essa equação possui várias incógnitas, por isso não pode ser resolvida por uma reorganização algébrica simples.

As fórmulas implícitas com as condições de contorno resultam em um conjunto de equações lineares algébricas com o mesmo número de incógnitas. Logo, o método se reduz a solução de um conjunto de equações simultâneas em cada ponto de tempo. A diferença para a forma explícita

está na derivada espacial aproximada em  $n + 1$ , nível de tempo avançado.

Para a resolução da equação (5.9), utilizamos a seguinte condição de contorno  $u(1, n) = u(r, n) = 0$ , onde  $r$  representa o número de pontos espaciais.

A discretização (5.9) com as condições iniciais e de contorno nos fornece, para cada instante de tempo  $n + 1$ , o valor de  $u$  que pode ser escrito na forma de um sistema matricial:

$$Bu_{i,n+1} = C_{i,n} \quad n = 0, 1, \dots, n_t \quad (5.10)$$

onde  $n_t$  representa o número pontos temporais. As matrizes  $B$  e  $C$  são matrizes tridiagonais, e suas entradas são dadas como segue:

$$B = \begin{pmatrix} 1 + 2m & -m & 0 & \dots & 0 \\ -m & 1 + 2m & -m & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -m \\ 0 & \dots & 0 & -m & 1 + 2m \end{pmatrix}$$

$$u_{i,n+1} = \begin{pmatrix} u_{1,n+1} \\ u_{2,n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{r,n+1} \end{pmatrix}$$

$$C_{i,n} = \begin{pmatrix} u_{0,n} + \Delta\tau\alpha u_{1,n}(1 - u_{1,n}) \\ u_{1,n} + \Delta\tau\alpha u_{2,n}(1 - u_{2,n}) \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{r-1,n} + \Delta\tau\alpha u_{r,n}(1 - u_{r,n}) \end{pmatrix}$$

O sistema é tridiagonal e pode ser resolvido com o algoritmo de Thomas. A dimensão de  $B$  é  $r \times r$  e a dimensão dos vetores  $u$  e  $C$  é  $1 \times r$ .

### Algoritmo Thomas

O algoritmo Thomas [73] é um método algébrico oriundo de uma simplificação da eliminação gaussiana para resolução de sistemas de equações

tridiagonais, por exemplo,

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & 0 & a_j & b_j & c_j & 0 & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_N & b_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_j \\ \dots \\ d_N \end{pmatrix}$$

Normalizando a linha 1 dividindo-a por  $b_1$ , então multiplicamos a linha 1 por  $a_2$  e subtraímos da linha 2. Como resultado obtemos,

$$\begin{aligned} b'_1 &= b_1/b_1 \\ a'_2 &= a_2 - b'_1 a_2 = 0 \\ d'_1 &= d_1/b_1 \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned} c'_1 &= c_1/b_1 \\ b'_2 &= b_2 - c_1 a_2/b_1 = b_2 - c'_1 a_2 \\ d'_2 &= d_2 - d'_1 a_2 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Agora normalizando a linha 2 dividindo por  $b'_2$ ,

$$\begin{aligned} b'_2 &= 1 \\ c'_2 &= c_2/(b_2 - c'_1 a_2) \\ d'_2 &= (d_2 - d'_1 a_2)/(b_2 - c'_1 a_2) \end{aligned} \tag{5.13}$$

Repetindo este procedimento, obtemos as fórmulas de iteração,

$$\begin{aligned} c'_1 &= c_1/c_1 \\ c'_j &= c_j/(b_j - c'_{j-1} a_j) \\ d'_j &= d_j/b_j \\ d'_j &= (d_j - d'_{j-1} a_j)/(b_j - c'_{j-1} a_j) \end{aligned} \tag{5.14}$$

para  $j = 2, 3, \dots, N-1$ . A forma fatorada da matriz é

$$\begin{pmatrix} 1 & c'_1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & c'_2 & \dots & \dots \\ \vdots & & & & \\ \dots & \dots & \dots & 1 & c'_{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{N-1} \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ \dots \\ d'_{N-1} \\ \dots \\ d'_N \end{pmatrix}$$

A matriz é resolvida com substituição de volta, isto é,

$$\begin{aligned} x_N &= d'_N \\ x_j &= d'_j - c'_j x_{j+1} \end{aligned} \quad (5.15)$$

### Verificação do método

Para verificação do método numérico obtido acima, primeiramente temos que resolver a equação diferencial (5.1) considerando  $b = 0$  e  $a = 0$  (sem termo de fonte). Com isso, a solução exata obtida pode ser escrita na forma,

$$u(x, t) = \sin(\pi\rho) \exp(-\varepsilon\pi^2\tau) \quad (5.16)$$

Na Fig. 5.4 comparamos a solução numérica, obtida pelo método de diferença finita implícita e a solução exata (5.16). Na Fig. 5.4(a), plotamos a densidade do plasma em função do tempo, a linha preta representa a solução exata e os círculos vermelhos representam a solução numérica para  $\varepsilon = 1,0$ ,  $\Delta\tau = 0,0001$  e  $\Delta\rho = 0,005$ . A Fig 5.4(b) representa a densidade em função de  $\rho$ , onde comparamos a solução numérica com a solução exata para dois  $\Delta\rho$  diferentes. Como podemos observar nessa figura, a diferença entre esses dois valores de  $\Delta\rho$  está diretamente relacionado à resolução do gráfico, ou seja, quanto menor o  $\Delta\rho$  melhor a resolução da grade espacial, mas como é observado, a precisão da solução é independente do  $\Delta\rho$  escolhido e sim, dependente do  $\Delta\tau$ , isto é, quanto menor o  $\Delta\tau$  mais próximo à solução numérica está da solução exata, porém, mais pesado se torna a simulação. Para o nosso caso, o melhor  $\Delta\tau$  que apresentou um ótimo balanço entre precisão e uma modelagem mais leve foi  $\Delta\tau = 0,0001$  com  $\Delta\rho = 0,005$ .

Um problema encontrado na escolha do método numérico para a equação não linear de reação-difusão, foi as instabilidades da solução nas regiões caóticas. Nesse regime, dependendo do método usado, a solução



torna-se muito sensível ao  $\Delta\rho$  escolhido, diferente do que ocorre nas regiões que não apresentam esse comportamento. A Fig. 5.5 exemplifica bastante esse problema. Na Fig 5.5(a) empregamos o método de diferença implícita. Para esse método, observa-se que a dinâmica da solução encontrada não apresenta uma sensibilidade na escolha do  $\Delta\rho$ , como apresentado no caso acima, mostrando que a solução nessas regiões é estável. O oposto ocorre na Fig 5.5(b), nesse gráfico, utilizamos o método de Crank-Nicholson (de modo à comparação ao método implícito), observamos que nesse método a dinâmica fica muito sensível à escolha do  $\Delta\rho$ , ou seja, quando mudamos o seu tamanho, a solução apresenta uma mudança significativa no seu comportamento, resultado das instabilidades numéricas nessas regiões.

Podemos concluir que o método implícito foi o melhor método que se adaptou ao nosso problema, tanto na precisão numérica e, principalmente, na estabilidade em regimes turbulentos, como foi visto anteriormente.

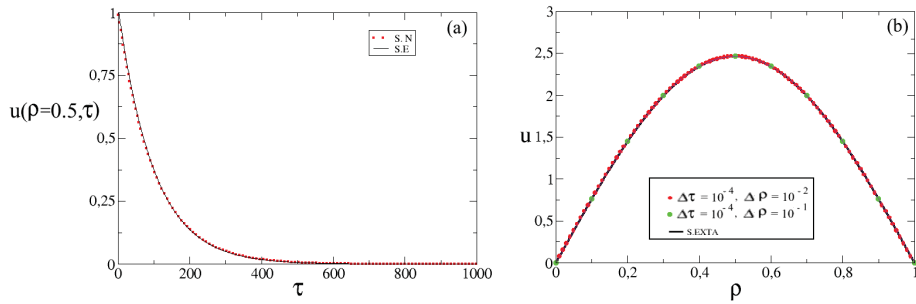


Figura 5.4: Gráfico comparando a solução numérica obtida pelo método de diferença finita implícita e solução exata da equação de difusão sem termo de fonte para  $\varepsilon = 1,0$ ,  $\Delta\tau = 0,0001$  e  $\Delta\rho = 0,005$ . (a) Plotamos a densidade em função do tempo. Os círculos vermelhos representam a solução numérica e a linha preta, a solução exata. (b) Representa a densidade em função de  $\rho$ , onde foi comparada a solução numérica com a solução exata para dois intervalos de  $\Delta\rho$  diferente.

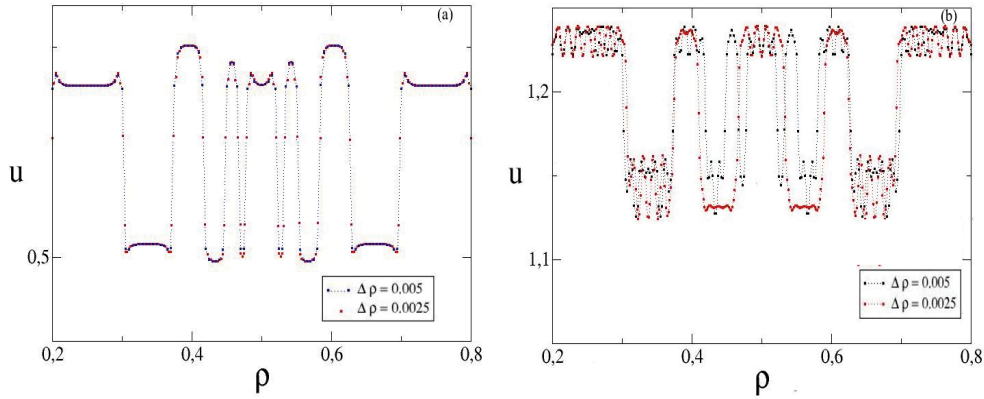


Figura 5.5: Comparação entre dois métodos de Diferença finita na região caótica. (a) Método implícito (b) Método de Crank - Nicholson

## 5.4 Padrões espaço-temporais

Os passos de integração utilizados para a equação (5.5) foram  $\Delta \tau = 0,0001$  e  $\Delta \rho = 0,005$ , respectivamente. A condição inicial utilizada foi a função difusiva ( $u(\rho, \tau = 0) = \sin(2\pi\rho)$ ) com condição de contorno  $u(0, \tau) = u(1, \tau)$ . Como o sistema é globalmente dissipativo e descartamos um grande número de tempos transitórios (100 000 iterações), verificou-se que os padrões espaciais observados não dependem das condições iniciais usadas. Por outro lado, as condições de contorno fixas usadas em nossas simulações numéricas afetam a dinâmica espaço-temporal. Por exemplo, não podemos ter propagação progressiva de ondas em nosso modelo, uma característica típica se condições periódicas de contorno forem usadas.

Consideramos os seguintes intervalos de parâmetros:  $0 < \varepsilon < 0,2$  e  $2,6 \times 10^4 < \alpha < 3,0 \times 10^4$ , onde produzem características dinâmicas bastante interessantes. Também integramos o EDP durante um período suficientemente grande para evidenciar um comportamento estacionário (ou não transitório), o que foi alcançado após cerca de  $10\tau$ .

O diagrama de fase (Fig.5.6) descreve um resumo das características dinâmicas do sistema de reação-difusão, onde plotamos (em escala de cor) o período temporal médio do padrão espacial. Esse número produz a dinâmica temporal dominante do sistema espaço-temporal para cada par de parâmetro  $(\alpha, \varepsilon)$ . Indicamos na Fig. 5.6 o padrão dominante observado, seguindo a mesma nomenclatura utilizada nas redes de mapas acoplados, ao qual foi usado primeiramente por Kaneko. Os chamados padrões aleatórios congelados foram identificados pela letra romana I na Fig 5.6, II

indica a seleção de padrão (com período decrescente para domínios regulares), **III** defeitos caóticos locais, **IV** é intermitência espaço-temporal, e **V** representa caos espaço-temporal completamente desenvolvido.

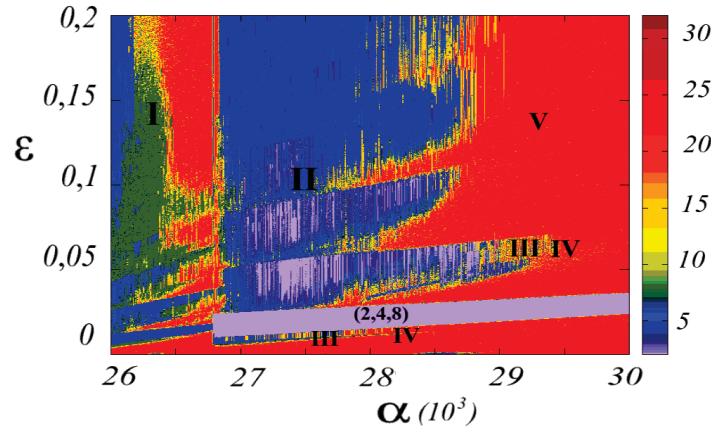


Figura 5.6: Diagrama de fases da Eq. (6.4), com a condição inicial  $u(\rho, \tau = 0) = \sin(2\pi\rho)$  e condições de contorno  $u(0, \tau) = u(1, \tau)$ . O período médio de tempo é plotado novamente contra o coeficiente de acoplamento  $\epsilon$  e o parâmetro de não linearidade  $\alpha$ . As letras romanas maiúsculas indicam: **I**: padrões aleatórios congelados; **II**: seleção de padrões; **III**: defeitos caóticos; **IV**: intermitência espaço-temporal; **V**: caos espaço-temporal totalmente desenvolvido.

A Figura 5.7(a) representa a categoria de padrão aleatório congelado. Nesse padrão temos um grande número de pequenos domínios com baixos períodos temporais misturados com regiões igualmente pequenas com movimento caótico. Esse padrão é "congelado" no sentido de que seus limites não se movem com o tempo. Com o aumento da não linearidade [Fig 5.7(b)] as regiões caóticas começam a dominar as regiões periódicas, mas seus limites continuam "congelado" no tempo. Aumentando o ( $\alpha$ ) [Fig 5.7(c)] ocorre o desaparecimento de domínios periódicos e a predominância de regiões caóticas (seleção de padrões). Além disso, os domínios periódicos também têm um período espacial baixo (padrões em zigue-zague). Um domínio caótico é limitado por padrões em zigue-zague, mas seus limites ainda são fixos no tempo. Um novo aumento da não linearidade, no entanto, faz com que estes e os domínios caóticos se movam juntos de maneira semelhante às partículas [Fig 5.7(d)], que chamamos de defeitos caóticos, mesma nomenclatura utilizada nas redes de mapas acoplados.

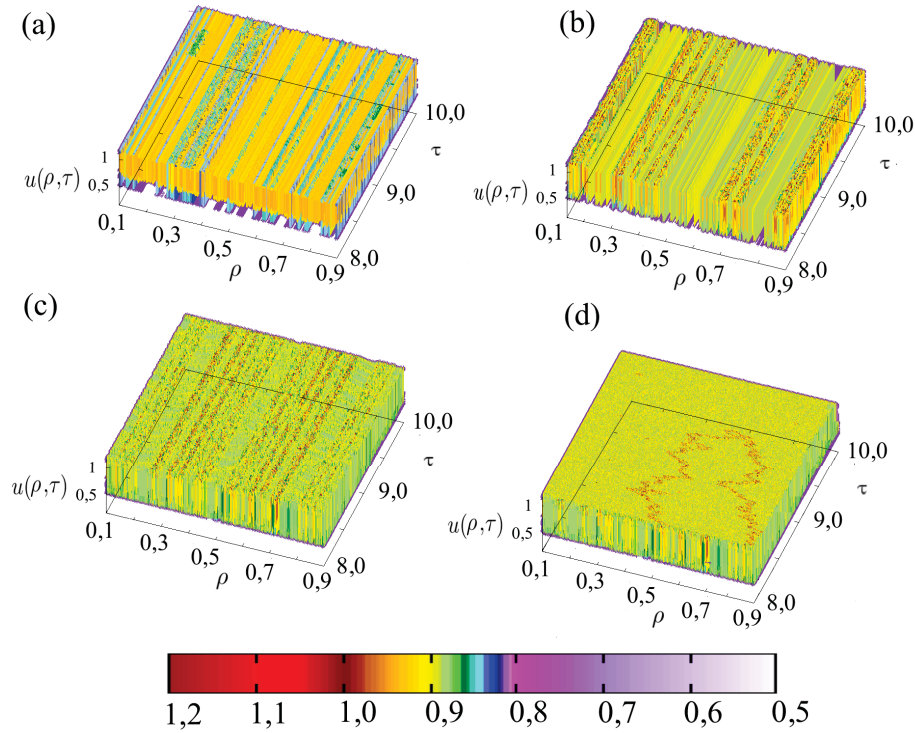


Figura 5.7: Gráficos espaço-temporais da densidade do plasma normalizada (em escala de cores) para  $\varepsilon = 0,01$  e  $\alpha/10^4 =$  (a) 2,60, (b) 2,70, (c) 2,75 e (d) 2,82.

Os defeitos caóticos tem, aparentemente, um movimento aleatório ao longo da rede, esse movimento será detalhado nas próximas seções.

Na Fig.5.7(d) observamos que dois defeitos caóticos podem aniquilar-se mutuamente quando colidem, ou colidem com a fronteira, e semelhante ao que ocorre nas redes de mapas acoplados, esses defeitos são transitórios. Com o aumento da não linearidade [Fig 5.8(a)] há uma multiplicidade dos defeitos que sofrem aniquilação mútua, causando uma transição intermitente entre comportamento caótico e não caótico, tanto na escala espacial quanto na escala temporal, o que geralmente é chamado de intermitência espaço-temporal. Finalmente, com não linearidade ligeiramente maior, há um comportamento caótico no espaço e no tempo sobre todo o plasma [Fig. 5.8(b)], uma situação que foi denominada “ turbulência totalmente desenvolvida ”.

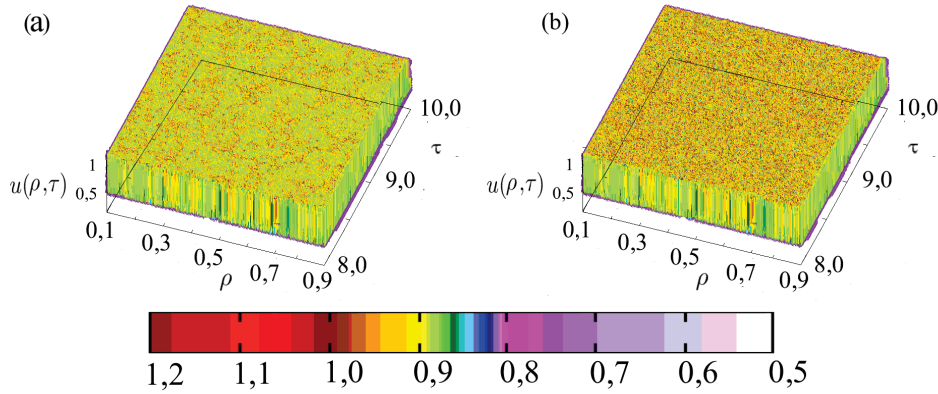


Figura 5.8: Gráficos espaço-temporais da densidade do plasma normalizada (em escala de cores) para  $\varepsilon = 0,01$  e  $\alpha/10^4 =$  (a) 2,83, (b) 2,85.

Na figura 5.9, procedemos de maneira semelhante, mas com  $\varepsilon = 0,05$ . As figuras 5.9(a) e (b) mostram gráficos de espaço-tempo para esse acoplamento maior e  $\alpha = 2,60 \times 10^4$  e  $2,70 \times 10^4$ , respectivamente. Ambas são semelhantes a 5.7(a)-(b). Os gráficos 5.9(d)-(e) mostram novamente a formação de defeitos e a intermitência espaço-temporal, mas os limites dos domínios em zigue-zague são maiores. Essa propriedade dos domínios em função do ( $\varepsilon$ ) será visto com mais detalhes na próxima seção.

Olhando para os defeitos caóticos[Fig 5.9(d)], podemos notar um número muito maior desses defeitos no plasma, o qual ocorreu no acoplamento anterior[Fig 5.7(d)]. A existência dessa grande quantidade de defeitos dificulta o discernimento do seu movimento aleatório pelo plasma e sua aniquilação mútua. Esse mesmo fenômeno pode ser visto na intermitência espaço-temporal[Fig 5.9(e)]. E por fim, na Fig 5.9(f) temos novamente a turbulência completamente desenvolvida.

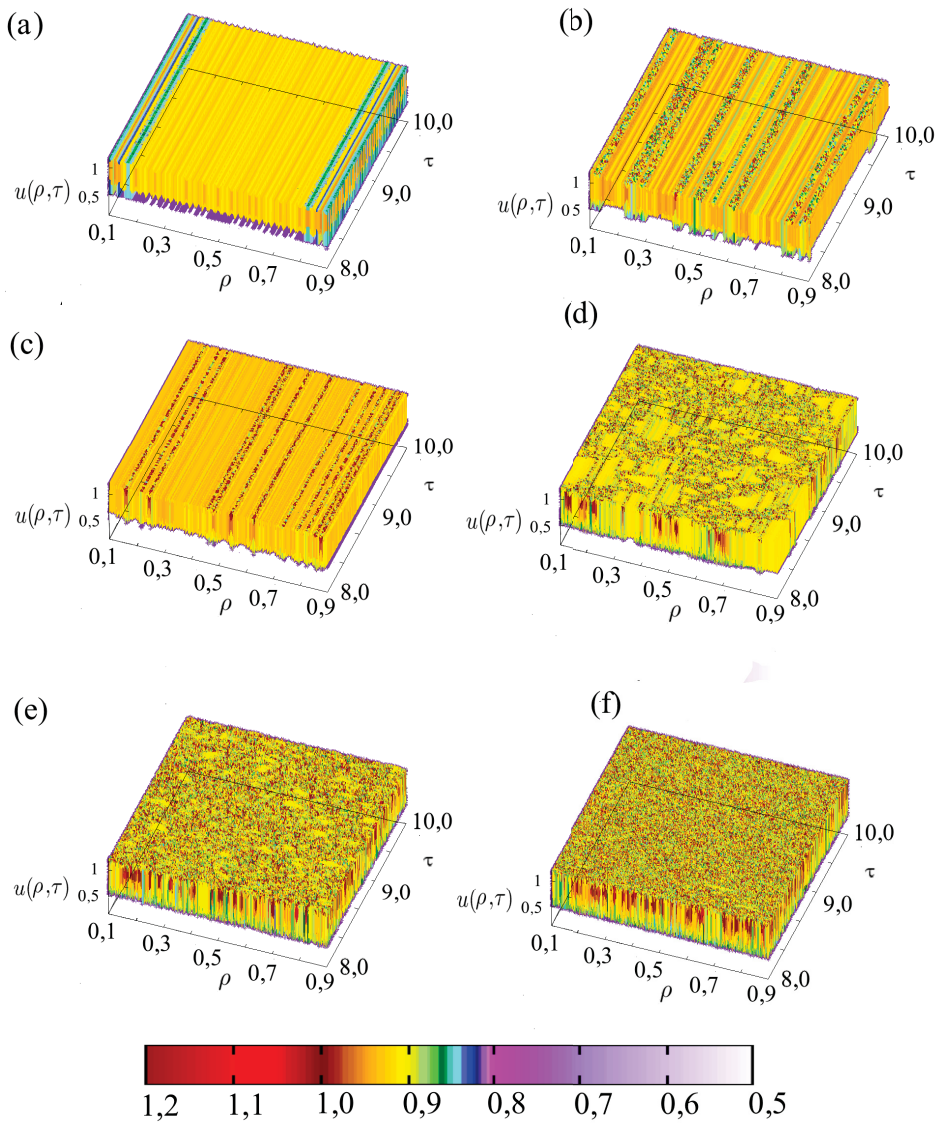


Figura 5.9: Gráficos espaço-temporais da densidade do plasma normalizada (em escala de cores) para  $\varepsilon = 0,05$  e  $\alpha/10^4 =$  (a) 2,60, (b) 2,70, (c) 2,86, (d) 2,92, (e) 2,95, (f) 3,00.

#### 5.4.1 Comparação entre as redes de mapas acoplados e equação de reação-difusão

Uma análise bastante importante é mostrado na Fig. 5.10. Nessa figura, comparamos a dinâmica entre as redes de mapas acoplados estudada no capítulo 5 e a integração direta da equação de reação difusão.



Na Fig.5.10(a) e 5.10(b), temos a formação do padrão aleatório congelado para as redes de mapas acoplados e diferença finita implícita, respectivamente. Em ambos os gráficos, podemos observar a semelhança na dinâmica, tanto espacial como temporal. Como característica desse padrão, os dois gráficos possuem domínios maiores com movimentos caóticos e os menores com movimentos regulares e ambos estáticos no tempo. É importante destacar que as formações de e *antikinks* também são observadas na integração da equação de reação-difusão. As Fig.5.10(c) e Fig.5.10(d) mostram a formação da seleção de padrão para as duas modelagens numéricas, e como é de se esperar, ambos os regimes apresentam a supressão do caos e predomínio de domínios de baixo período (padrão de zigue-zague). Nas últimas Figs.5.10(e)-(f), comparamos o padrão dos defeitos caóticos entre os mapas acoplados e a integração direta da equação de reação-difusão. Nos dois casos, o padrão apresenta regiões caóticas localizadas no espaço e com movimento aleatório, esses defeitos apresentam movimentos semelhantes aos defeitos encontrados nas redes de mapas acoplados, ou seja, possuem movimento browniano com memória (dinâmica com um grande grau de correlação) [74].

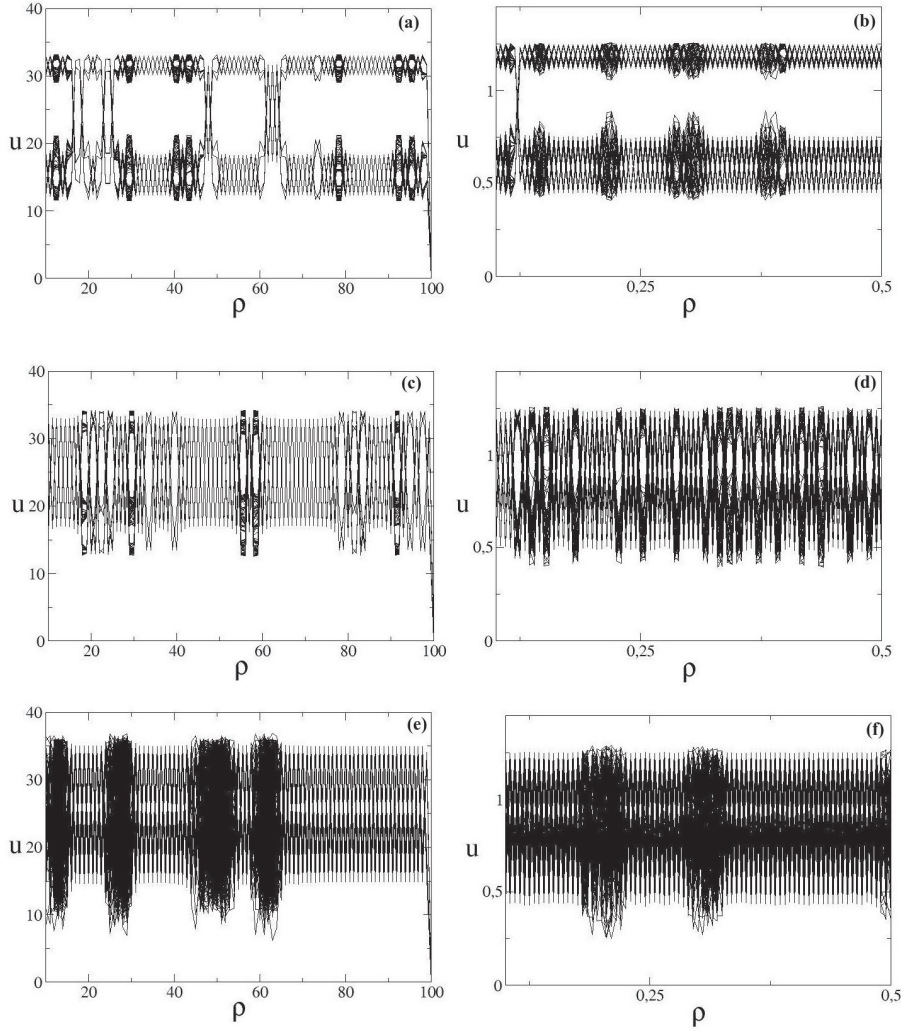


Figura 5.10: Nessa figura comparamos os padrões espaço-temporais entre as redes de mapas acoplados e a integração numérica com os parâmetros de integração  $\Delta\rho = 0,005$  e  $\Delta\tau = 0,0001$ . Os resultados mostram a semelhança dos perfis espaço-temporais entre as duas simulações numéricas, respetivamente. (a) Padrão aleatório congelado para redes de mapas acoplados com  $\varepsilon = 0,1$ ,  $\beta = 0,1$  e  $\alpha = 2,65$ , overlap de 200 interações. (b) Padrão aleatório congelado para integração direta da equação de reação-difusão com  $\varepsilon = 0,01$  e  $\alpha = 2,65 \times 10^4$ , overlap de 200 interações. (c) Seleção de padrão para redes de mapas acoplados com  $\varepsilon = 0,1, \beta = 0,1$  e  $\alpha = 2,75$ , overlap de 200 interações. (d) Seleção de padrão para integração direta da equação de reação-difusão com  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\alpha = 2,75 \times 10^4$ , overlap de 200 interações. (e) Defeito caótico para redes de mapas acoplados com  $\varepsilon = 0,1, \beta = 0,1$  e  $\alpha = 2,85$ , overlap de 200 interações. (f) Defeito caótico para integração direta da equação de reação-difusão com  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\alpha = 2,81 \times 10^4$ , overlap de 200 interações.



Desconsiderando os valores dos parâmetros utilizados, que são diferentes para as duas simulações numéricas (comparação qualitativa), é notável como um modelo, de certa forma simples como as redes de mapas acoplados, conseguem recuperar praticamente toda a dinâmica complexa encontrada na integração direta da equação de reação-difusão. Isto fica bem evidenciado quando comparamos o diagrama de fase entre eles (Fig. 5.11). Em ambos os métodos numéricos, o resumo do conjunto de padrões dinâmicos está presente e encontramos praticamente os mesmos padrões nos dois casos.

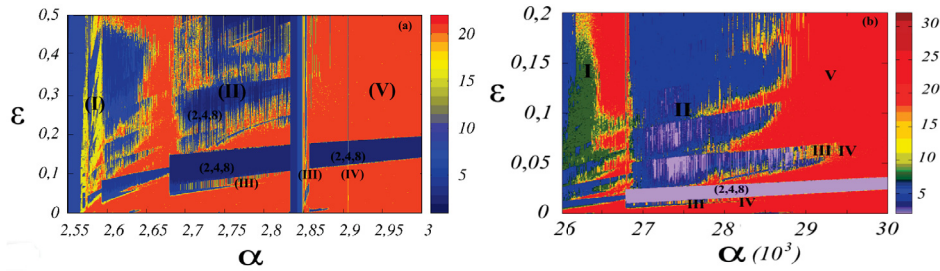


Figura 5.11: Nessa figura mostramos que a mesma dinâmica encontrada nas redes de mapas acoplados é obtida quando utilizamos a integração numérica. Isso fica bem evidenciada quando comparamos o diagrama de fase entre as duas simulações, respetivamente. (a) Diagrama de fase das redes de mapas acoplados. (b) Diagrama de fase na integração numérica.

## 5.5 Comprimento de onda natural

É instrutivo considerar o efeito de aprimorar o acoplamento, aumentando para  $\epsilon = 0,05$ , por exemplo.

A observação de que a suavização dos kinks devido ao aumento do acoplamento (ou seja, mais difusão) pode ser interpretada em termos da noção de um comprimento de onda espacial natural  $\lambda$ , que aparece como resultado de uma competição entre reação e difusão em sistemas como a equação 5.5 [33]. Uma das consequências dessa competição é que grandes domínios caóticos podem se dividir em domínios regulares menores, com um comprimento de onda espacial  $\lambda$ .

Primeiramente, vamos reescrever a equação 5.5 na forma

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = R(u) \quad (5.17)$$

onde  $R(u) \equiv \alpha u(1 - u)$  é a taxa de reação. Se a reação contrabalancear a difusão, é esperado que  $\partial u / \partial \tau \approx 0$ , de modo a produzir um padrão independente do tempo. Este último é suposto ter um comprimento de onda  $\lambda$ , tal que  $u(\rho) \sim \exp(2\pi i \rho / \lambda)$ , substituindo em (5.17), resulta em

$$\frac{4\pi^2 \varepsilon u}{\lambda^2} = R(u) \quad (5.18)$$

A taxa de reação tem um valor máximo em  $R_{max} = \alpha/4$  e  $u_{max} = 1/2$ . Inserindo esses valores na expressão acima, temos uma expressão analítica para o comprimento de onda natural

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\alpha}} \quad (5.19)$$

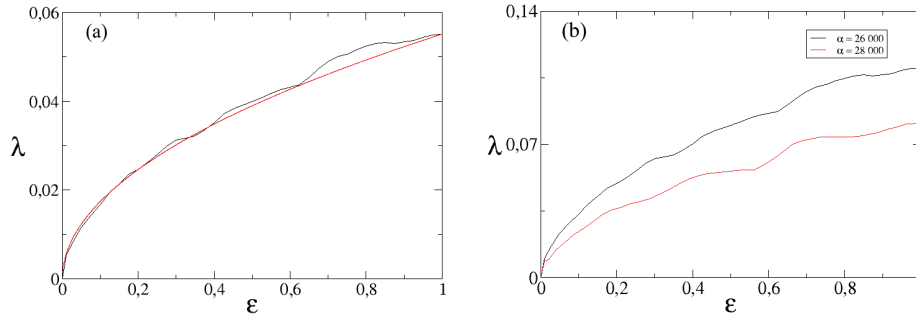


Figura 5.12: (a) Comprimento de onda espacial  $\lambda$  em função do coeficiente de acoplamento  $\varepsilon$  para  $\alpha = 2,6 \times 10^4$ : Curvas pretas são estimativas numéricas e as curvas vermelhas são a estimativa teórica (5.19) (b) Estimativa numérica de  $\lambda$  para dois valores diferentes de  $\alpha$ .

Uma maneira direta para estimar o comprimento natural para um dado valor de  $(\alpha, \varepsilon)$ , é contar o número de domínios  $N_d$  presentes no intervalo  $0 \leq \rho \leq 1$ , de tal maneira que  $\lambda \approx 1/(2N_d)$ . Na Figura 5.12(a) comparamos o resultado numérico (curva preta) com a estimativa teórica Eq. (5.19) (curva vermelha) no caso de  $\alpha$  fixo, variando somente o  $\varepsilon$ , mostrando um acordo notável, mesmo utilizando premissas grosseiras para essa estimativa.

A influência de  $\alpha$ , variando  $\varepsilon$ , é mostrado na Fig. 5.12(b), onde ambos aumentam com  $\varepsilon^{1/2}$ , de acordo com Eq. (5.19). Consequentemente se fixarmos  $\varepsilon$  segue-se que o comprimento de onda natural diminui com o aumento de  $\alpha$ .

A presença de oscilações espaciais no período natural dentro de domínios estáveis é ilustrada em Fig. (5.13). O aparecimento dessas oscilações espaciais [33] pode induzir uma transição direta para o caos dentro de um domínio. Por outro lado, a quebra de um grande domínio em uma solução espacialmente oscilante pode dar origem a movimento regular dentro desse domínio. A Fig. 5.14(b) mostra um exemplo desse comportamento para  $\varepsilon = 0,01, \alpha = 2,75 \times 10^4$ , tal que, utilizando a Eq. (5.19),  $\lambda$  (em unidade do sítio da rede) é aproximadamente  $\lambda \approx 0,0053$ . Para o menor valor de  $\alpha$  (Fig. 5.14(a)), podemos ver uma mistura característica de grandes domínios caóticos e pequenos domínios regulares. Um aumento  $\alpha$  (Fig. 5.14(b)) causa a diminuição do comprimento de onda como previsto pela equação (5.19). Como  $\lambda$  é da ordem de unidade, temos os menores domínios regulares, correspondendo ao padrão em zigue-zague. Um aumento adicional de  $\alpha$  causará a criação de domínios espacialmente desordenados com limites fixos. Esses domínios evoluem para defeitos caóticos, à medida que seus limites se tornam móveis.

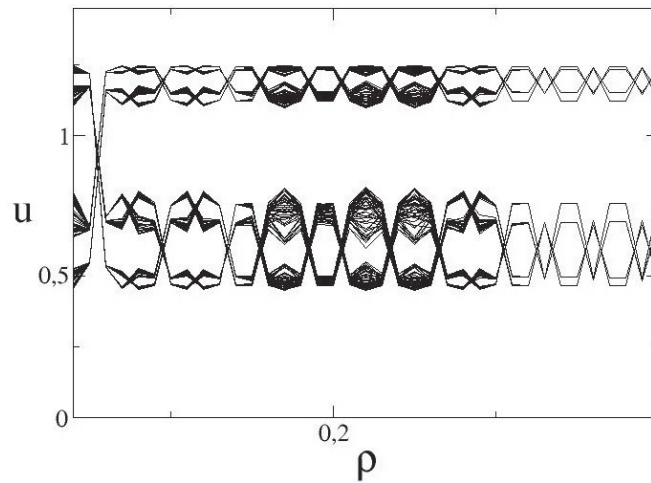


Figura 5.13: Padrão aleatório congelado com  $\alpha = 2,6 \times 10^4$  e  $\varepsilon = 0,01$ . As regiões mais densas representam os domínios caóticos.

A criação múltipla e a destruição de defeitos caóticos levam à intermitência espaço-temporal e à turbulência totalmente desenvolvida, conforme ilustrado pelos gráficos de espaço-tempo da seção anterior.

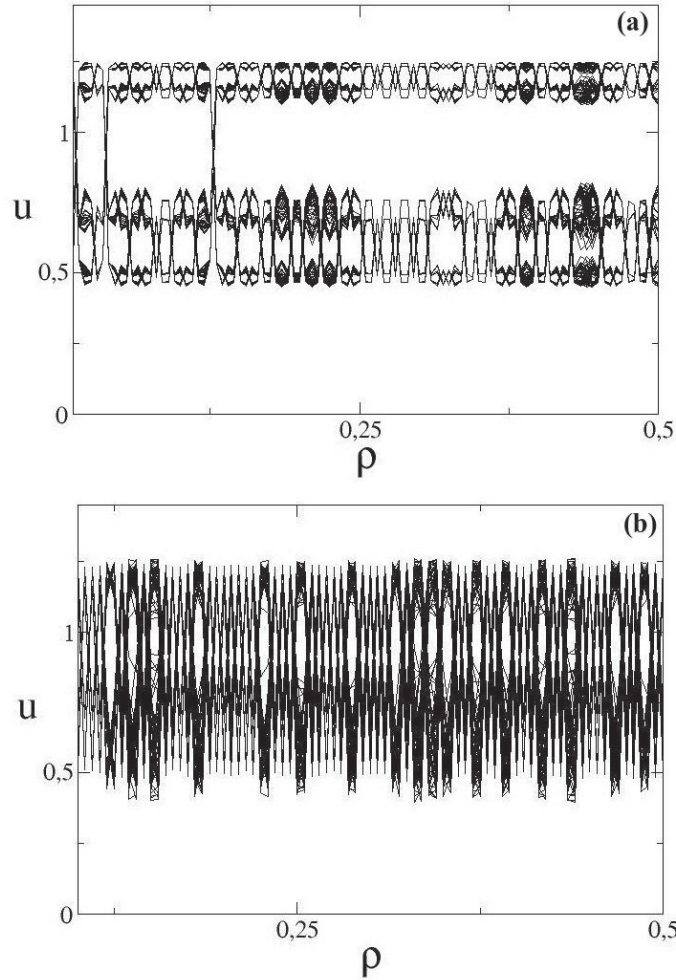


Figura 5.14: Gráfico da densidade do plasma normalizado em função de  $\rho$  para a equação de reação-difusão. Amplitude  $u$  com de 200 iterações, após um transiente de 10 tempos característicos. (a)  $\varepsilon = 0,01$  e  $\alpha = 2,65 \times 10^4$  (b)  $\varepsilon = 0,01$  e  $\alpha = 2,75 \times 10^4$ .

## 5.6 Expoente de Lyapunov Médio

O espectro de Lyapunov da equação diferencial parcial (5.5) foi obtida através da aplicação do método proposto por Shibata [34, 42, 75]. A partir do esquema de integração numérica, transformamos (5.5) em uma equa-

ção de diferença finita na forma

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} = h(\Delta \rho(u_j^k)) \quad (5.20)$$

onde  $\Delta \tau$  e  $\Delta \rho$  são os passos no tempo e no espaço, e  $(k, j)$  denotam o tempo e a posição discreta, respectivamente, tal que  $u_j^k = u(\rho = j\Delta \rho, \tau = k\Delta \tau)$  onde  $k, j = 1, 2, \dots, N-1$ . A matriz Jacobiana correspondente tem seus elementos

$$B_{ij}^{k,N} = \frac{\partial u_i^{k+1}}{\partial u_j^k} \quad (i, j \in 1, 2, \dots, N-1) \quad (5.21)$$

tal que o expoente de Lyapunov médio é definido por

$$\lambda_k = \frac{1}{N} \ln |\det B^{k,N}| \quad (5.22)$$

O raciocínio por trás dessa definição é que o determinante da matriz jacobiana (5.21) pode ser interpretado como representante da desordem da variável de estado  $u$  em um tempo discreto  $k$  [46]. Portanto, o expoente médio de Lyapunov representa a média dessa desordem sobre a rede, produzindo um valor maior quando a desordem espacial é maior. No entanto, à medida que o sistema dinâmico evolui com o tempo, o grau de desordem representado por  $\lambda_k$  varia com o tempo, de forma que é melhor trabalhar com expoente Lyapunov local com média no tempo

$$\Lambda_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \quad (5.23)$$

onde  $n$  é um número inteiro e muito grande. Deve-se enfatizar que esses expoentes médios de Lyapunov são diferentes daqueles usualmente calculados no espaço de fase e que medem a taxa exponencial de separação entre duas trajetórias inicialmente próximas. Conforme definido por Shibata, o expoente médio deve ser tomado como uma medida local de desordem e não corresponde a taxas de separação exponencial. No entanto, a interpretação geral é basicamente a mesma: valores positivos de  $\Lambda_T$  indicam desordem, enquanto valores negativos, indicam movimento regular.

### 5.6.1 Expoente de Lyapunov para equação de reação-difusão

Dada a equação diferencial parcial de reação-difusão

$$\frac{\partial u(\rho, \tau)}{\partial \tau} - \varepsilon \frac{\partial^2 u(\rho, \tau)}{\partial \rho^2} = \alpha u(\rho, \tau)(1 - u(\rho, \tau)) \quad (5.24)$$

com as condições de contorno fixas

$$u(0, \tau) = u(1, \tau) = 0 \quad (5.25)$$

Usando o método de diferença finita 5.20, podemos reescrever a equação 5.24

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta \tau} = \varepsilon \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{(\Delta \rho)^2} + \alpha(1 - u_j^k)u_j^k \quad (5.26)$$

onde  $j = 1/\Delta \rho$ , condição inicial  $u(\rho, \tau = 0) = \sin(2\pi\rho)$  e a condição de contorno fixa

$$u_0^k = u_J^k = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Rearranjando a equação 5.26 na forma

$$u_j^{k+1} = \frac{\Delta \tau \cdot \varepsilon}{(\Delta \rho)^2} (u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + \Delta \tau \cdot \alpha(1 - u_j^k)u_j^k - u_j^k \quad (5.27)$$

Utilizando 5.21, podemos escrever a matriz Jacobiana da Eq.(5.27)

$$B_{n,N} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial u_2^k} & \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial u_3^k} & \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial u_4^k} & \cdots & \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial u_J^k} \\ \frac{\partial u_3^{k+1}}{\partial u_2^k} & \frac{\partial u_3^{k+1}}{\partial u_3^k} & \frac{\partial u_3^{k+1}}{\partial u_4^k} & \cdots & \frac{\partial u_3^{k+1}}{\partial u_J^k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial u_J^{k+1}}{\partial u_2^k} & \frac{\partial u_J^{k+1}}{\partial u_3^k} & \frac{\partial u_J^{k+1}}{\partial u_4^k} & \cdots & \frac{\partial u_J^{k+1}}{\partial u_J^k} \end{pmatrix}$$

onde

$$\frac{\partial u_j^{k+1}}{\partial u_j^k} = 1 - 2 \frac{\Delta \tau \cdot \varepsilon}{(\Delta \rho)^2} + \Delta \tau \cdot \alpha(1 - 2u_j^k) \quad (j = 2, \dots, J)$$

$$\frac{\partial u_j^{k+1}}{\partial u_{j+1}^k} = \frac{\Delta \tau \cdot \varepsilon}{(\Delta \rho)^2} \quad (j = 2, \dots, J-1)$$

$$\frac{\partial u_j^{k+1}}{\partial u_{j-1}^k} = \frac{\Delta\tau \cdot \varepsilon}{(\Delta\rho)^2} \quad (j = 3, \dots, J)$$

São iguais a zero os outros elementos.

Com a matriz Jacobiana da Eq. 5.24, podemos calcular o expoente de Lyapunov médio

$$\lambda_k = \frac{1}{J-1} \ln |\det B^{k,j}| \quad (5.28)$$

e o expoente Lyapunov local

$$\Lambda_T = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \quad (5.29)$$

onde  $T = n \times \Delta\tau$ .

Na Fig. 5.15, plotamos (em escala de cores) o expoente de Lyapunov local (5.29) versus os parâmetros de acoplamento ( $\varepsilon$ ) e a não linearidade ( $\alpha$ ). Como podemos observar, para o intervalo de parâmetros considerado nesse trabalho, a maioria dos padrões espaço-temporais podem ser caracterizados como desordenados (expoente positivo de Lyapunov) com exceção de uma região em forma de gancho de cabelo ( $0 \lesssim \varepsilon \lesssim 0,05$  e  $2,70 \lesssim (\alpha/10^4) \lesssim 3,0$ ), onde o expoente local é negativo.

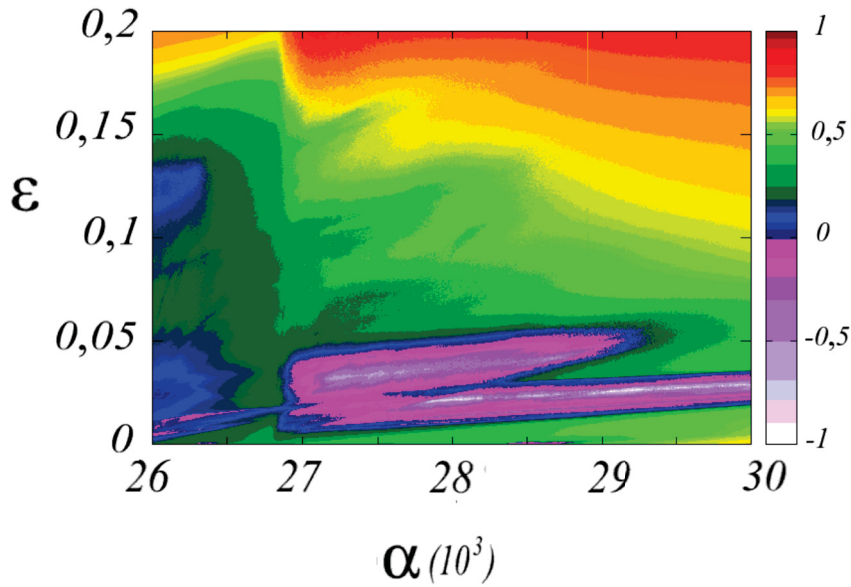


Figura 5.15: Expoente local de Lyapunov (em escala de cores) em função dos parâmetros de acoplamento  $\varepsilon$  e não linearidade  $\alpha$ . As regiões com os expoentes menores que zero são as regiões ordenadas. As regiões com os expoentes acima de zero são regiões desordenadas.

De fato, comparando as Figs 5.6 e 5.15, concluímos que a região ordenada corresponde a região identificada como seleção de padrão (2, 4, 8) na Fig. 5.6, com período temporal 2, 4, 8, etc. Com o aumento do parâmetro da não linearidade pode gerar uma cascata de dobramento de período até o caos temporal. A maioria dos pontos no diagrama de fases, no entanto, tem uma dinâmica caótica predominante, com maior desordem espacial em pontos classificados como turbulência totalmente desenvolvida, como o esperado.

## 5.7 Defeitos Caóticos

Defeitos caóticos podem ser definidos em sistemas espacialmente estendidos, como regiões de dinâmicas caóticas espacialmente localizadas que separam regiões em zigue-zague de diferentes fases [24]. Os identificamos em nosso sistema de reação-difusão para alguns valores dos parâmetros ( $\varepsilon$  e  $\alpha$ ) [ver Fig. 5.7(d), por exemplo].

A figura 5.16 mostra o movimento de um dos pares de defeitos mostrados em [ver 5.7(d)]. À primeira vista, seu movimento é bastante semelhante aos defeitos encontrados nas redes de mapas acoplados.



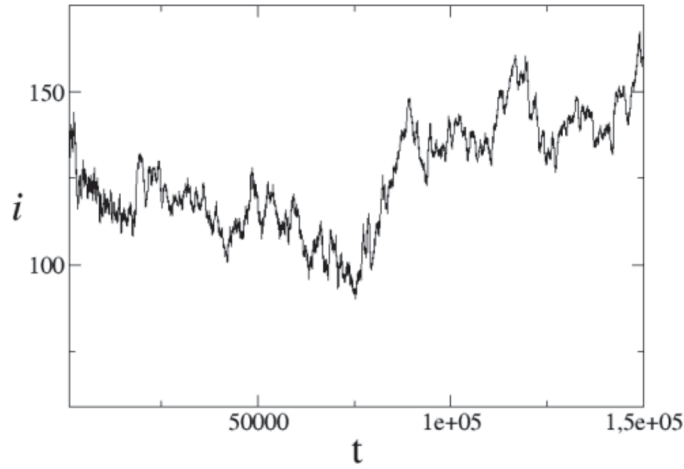


Figura 5.16: Movimento de um defeito individual para o par de parâmetros ( $\varepsilon = 0,01$  e  $\alpha = 2,82 \times 10^4$ )

Defeitos caóticos normalmente se movem de maneira irregular, semelhante a um movimento browniano [25]. Como ilustrado na figura.5.7(d)], defeitos caóticos podem colidir e aniquilar-se mutuamente, ou então colidir com a fronteira e desaparecer.

No capítulo 5, descrevemos o movimento desses defeitos caóticos em uma rede quadrática de mapas acoplados que apresenta características semelhantes ao atual sistema de difusão de reação [29]. Na verdade, as redes de mapas acoplados podem ser obtidas a partir da equação diferencial parcial (5.5), desde que o termo de reação do lado direito seja pulsado [33]. Vale a pena investigar esse fenômeno aqui também, já que agora lidamos com um sistema de tempo contínuo.

No nosso trabalho [74] foi mostrado, a partir da entropia de recorrência, que as séries temporais dos defeitos caóticos são compatíveis com um ruído colorido com expoente de lei de potência  $\sigma$  entre 2,0 e 2,1. Dinamicamente falando, isso significa que a evolução temporal dos defeitos caóticos tem propriedades estatísticas similar ao movimento Browniano com memória, isto é, ruído colorido com espectro de potência  $\approx f^{-2,0}$ . Esse resultado reforça observações anteriores de que o defeito caótico se difunde em uma rede de maneira semelhante ao movimento browniano. No entanto, o movimento browniano neste caso tem um grau de memória graças à natureza determinística do movimento caótico do defeito.

## Capítulo 6

# Equação de reação-difusão com perturbação de ondas estacionárias em plasmas fracamente ionizados

Modelamos a influência de uma perturbação de densidade externa em um plasma fracamente ionizado não magnetizado, através da injeção de uma onda íon-acústica. Devido às paredes metálicas delimitadoras, após um curto período de tempo, esperamos a presença de padrões de ondas estacionárias. Por simplicidade, consideramos um único modo ressonante, com nós nas paredes ( $\rho = 0$  e  $\rho = 1$ ) e no centro  $\rho = 0,5$ . Isso adiciona um novo termo no lado direito da equação (5.5), de modo que, seja escrita na forma.

$$\frac{\partial u(\rho, \tau)}{\partial \tau} - \varepsilon \frac{\partial^2 u(\rho, \tau)}{\partial \rho^2} = \alpha u(\rho, \tau)(1 - u(\rho, \tau)) + u_0 \sin(2\pi\rho) \sin(\omega\tau), (6.1)$$

onde  $u_0$  e  $\omega$  são a amplitude e a frequência de oscilação da onda, respectivamente.

A equação (6.1) foi resolvida com as condições de contorno 5.2 e utilizando o mesmo método da equação sem perturbação 5.5. O passo no tempo e no espaço utilizado foram  $\Delta\tau = 0,0001$  e  $\Delta\rho = 0,005$ , respectivamente. O perfil inicial usado foi  $u(\rho, 0) = \sin(2\pi\rho)$  e a condição de contorno  $u(0, \tau) = u(1, \tau) = 0$ . Uma vez que o sistema é globalmente dissipativo e descartamos um grande número de transiente temporal, os perfis espaciais observados são independentes das condições iniciais. Por outro lado, as condições de contorno fixas usadas em nossas simulações numéricas afetam de maneira muito importante a dinâmica espaço-temporal.

Inicialmente, mostramos resultados numéricos que ilustram o efeito de ondas de diferentes frequências em um plasma com dinâmica caótica espaço-temporal. Nessa seção, destacamos três perfis espaciais já estudados nas seções anteriores: padrão aleatório congelado (Fig.6.1), defeitos caóticos (Fig.6.2) e finalmente intermitência espaço-temporal (Fig.6.3 [44]) que podem ser encontrados para um coeficiente de acoplamento  $\varepsilon = 0,01$  e um parâmetro não linear  $\alpha = 2,6 \times 10^4$ ,  $\alpha = 2,82 \times 10^4$  e  $\alpha = 2,83 \times 10^4$ , respectivamente.

As figuras(6.1(a)-(d)) são gráficos espaço-temporais da densidade normalizada antes e após a aplicação (no tempo  $\tau = 10$ ) de uma onda estacionária de amplitude fixa  $n_0 = 0,04$  e diferentes frequências  $\omega$ .

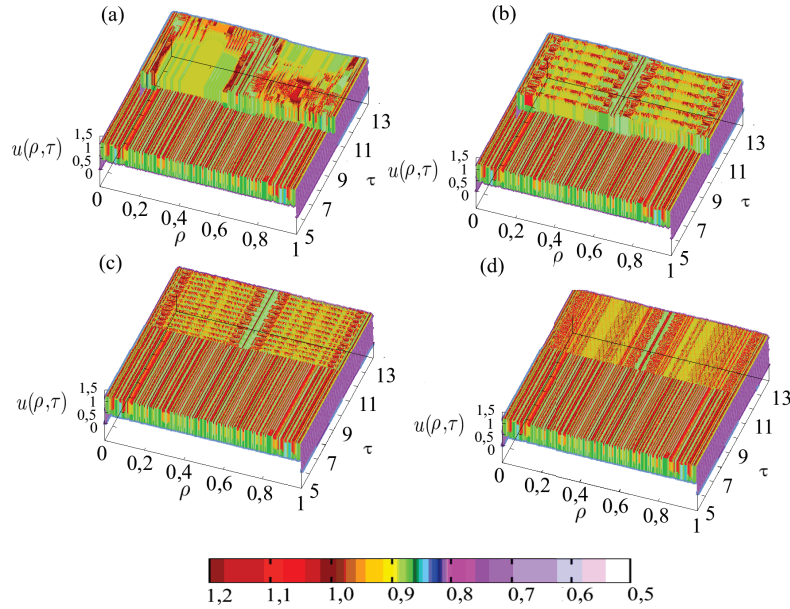


Figura 6.1: Gráficos espaço-temporais da densidade normalizada do plasma (em escala de cores) para  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\alpha = 2,6 \times 10^4$  and  $n_0 = 0,04$ , onde uma perturbação foi aplicada em  $\tau = 10$  para quatro diferentes frequências.(a)  $\omega = 1$  (b)  $\omega = 10$  (c)  $\omega = 20$  (d)  $\omega = 100$ .

Para todos os casos mostrados na figura (6.1), observamos uma quebra dos padrões aleatórios congelados depois que a onda é acionada, e o plasma é forçado a oscilar no mesmo modo espacial que a onda externa com um nó no ponto central  $\rho = 0,5$ . Para pequenas frequências, os padrões são quase tão irregulares quanto antes [Fig.6.1(a)], mas com o aumento de  $\omega$ , a densidade do plasma exibe oscilações com aproximada-

mente a mesma frequência da onda externa em um exemplo de arrastamento [Fig.6.1(a)-(d)].

Outro exemplo do efeito de uma onda estacionária externa é mostrada na Fig. 6.2, onde temos um padrão espaço-temporal com defeitos caóticos, antes da perturbação ser aplicada.

Após a aplicação da onda estacionária em  $\tau = 10$ , com baixa frequência, nós observamos que o defeito caótico não desapareceu, mas é deslocado espacialmente ou reaparece após um transiente [Fig.6.2(b)]. Para frequências mais altas, no entanto, os defeitos caóticos desaparecem e são substituídos por oscilações quase ressonantes com a força externa.

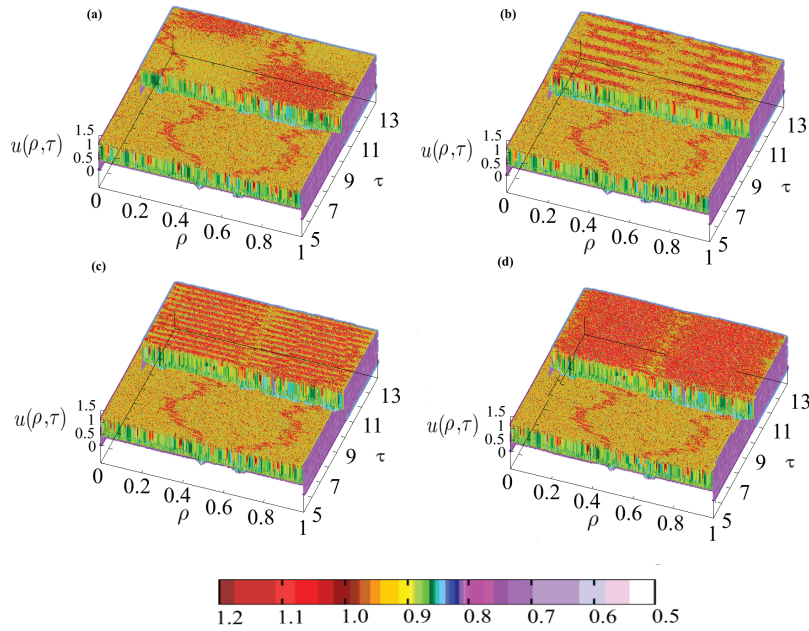


Figura 6.2: Gráficos espaço-temporais da densidade normalizada do plasma (em escala de cores) para  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\alpha = 2,82 \times 10^4$  and  $n_0 = 0,04$ , onde uma perturbação foi aplicada em  $\tau = 10$  para quatro diferentes frequências. (a)  $\omega = 1$  (b)  $\omega = 10$  (c)  $\omega = 20$  (d)  $\omega = 100$

Um terceiro exemplo é observado nas Figs. 6.3(a)-(d), onde o regime dinâmico antes de a perturbação ser aplicada, pode ser classificado como intermitência espaço-temporal. Após a aplicação da perturbação, a resposta do plasma segue o mesmo padrão espacial da onda com oscilações arrastadas para a perturbação externa. Além disso, observamos uma diminuição geral nas oscilações de densidade turbulenta, uma vez que a densi-

dade tende a se concentrar nos máximos das ondas.

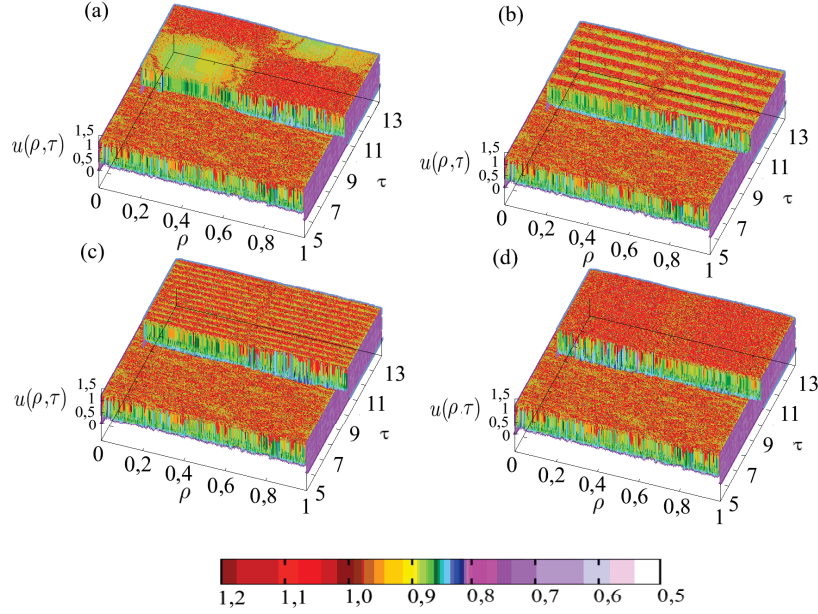


Figura 6.3: Gráficos espaço-temporais da densidade normalizada do plasma (em escala de cores) para  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\alpha = 2,83 \times 10^4$  and  $n_0 = 0,04$ , onde uma perturbação foi aplicada em  $\tau = 10$  para quatro diferentes frequências. (a)  $\omega = 1$  (b)  $\omega = 10$  (c)  $\omega = 20$  (d)  $\omega = 100$

## 6.1 Expoente de Lyapunov médio para equação de reação-difusão perturbada

Algumas das conclusões que obtivemos na seção anterior eram essencialmente qualitativas e baseadas em uma inspeção superficial nas regiões do espaço-tempo. Uma caracterização adequada do grau de supressão do comportamento caótico, tanto no espaço quanto no tempo, precisaria de diagnósticos numéricos adequados.

Um desses diagnósticos é o espectro de Lyapunov médio para equações diferenciais parciais (6.1), obtido através da aplicação do método proposto por Shibata [42].

Dada a equação diferencial parcial de reação-difusão perturbada

$$\frac{\partial u(\rho, \tau)}{\partial \tau} - \varepsilon \frac{\partial^2 u(\rho, \tau)}{\partial \rho^2} = \alpha u(\rho, \tau)(1 - u(\rho, \tau)) + u_0 \sin(2\pi\rho) \sin(\omega\tau), \quad (6.2)$$

com as condições de contorno fixas

$$u(0, \tau) = u(1, \tau) = 0 \quad (6.3)$$

Usando o método de diferença finita 5.20, podemos reescrever a equação (6.2)

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta \tau} = \varepsilon \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{(\Delta \rho)^2} + \alpha(1 - u_j^k)u_j^k + u_0^k \sin(2\pi j) \sin(\omega k), \quad (6.4)$$

onde  $j = 1/\Delta \rho$ , condição inicial  $u(\rho, \tau = 0) = \sin(2\pi \rho)$  e a condição de contorno fixa

$$u_0^k = u_j^k = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Rearranjando a equação 6.4 na forma

$$u_j^{k+1} = \frac{\Delta \tau \cdot \varepsilon}{(\Delta \rho)^2} (u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + \Delta \tau \cdot \alpha(1 - u_j^k)u_j^k + u_0^k \Delta \tau \sin(2\pi j) \sin(\omega k) \quad (6.5)$$

Utilizando 5.21, podemos escrever a matriz Jacobiana da Eq.(6.5)

$$B_{n,N} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial u_2^k} & \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial u_3^k} & \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial u_4^k} & \cdots & \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial u_J^k} \\ \frac{\partial u_3^{k+1}}{\partial u_2^k} & \frac{\partial u_3^{k+1}}{\partial u_3^k} & \frac{\partial u_3^{k+1}}{\partial u_4^k} & \cdots & \frac{\partial u_3^{k+1}}{\partial u_J^k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial u_J^{k+1}}{\partial u_2^k} & \frac{\partial u_J^{k+1}}{\partial u_3^k} & \frac{\partial u_J^{k+1}}{\partial u_4^k} & \cdots & \frac{\partial u_J^{k+1}}{\partial u_J^k} \end{pmatrix}$$

onde

$$\frac{\partial u_j^{k+1}}{\partial u_j^k} = 1 - 2 \frac{\Delta \tau \cdot \varepsilon}{(\Delta \rho)^2} + \Delta \tau \cdot \alpha(1 - 2u_j^k) \quad (j = 2, \dots, J),$$

$$\frac{\partial u_j^{k+1}}{\partial u_{j+1}^k} = \frac{\Delta \tau \cdot \varepsilon}{(\Delta \rho)^2} \quad (j = 2, \dots, J-1),$$

$$\frac{\partial u_j^{k+1}}{\partial u_{j-1}^k} = \frac{\Delta \tau \cdot \varepsilon}{(\Delta \rho)^2} \quad (j = 3, \dots, J),$$

os outros elementos = 0.

Com a matriz Jacobiana da Eq.(6.5), calculamos o expoente de Lyapunov médio

$$\lambda_k = \frac{1}{J-1} \ln |\det B^{k,j}|, \quad (6.6)$$

e o expoente de Lyapunov local

$$\Lambda_T = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j, \quad (6.7)$$

onde  $T = n \times \Delta\tau$ .

Nas figuras 6.4(a)-(b) plotamos (em escala de cor) o expoente de Lyapunov local em função de diferentes pares de parâmetros. As regiões brancas são as quais o expoente diverge para menos infinito. Na ausência da perturbação externa ( $u_0 = 0$ ), o expoente varia de valores negativos para valores positivos de acordo com o grau de desordem (isto é, aumento de  $\alpha$ ). De fato, os exemplos representados nas Figs. (6.1 a 6.3) correspondem a diferentes pontos nessa linha: padrões aleatórios congelados, defeitos caóticos e intermitência espaço-temporal, com uma desordem crescente.

À medida que a perturbação é ativada, temos modificações substanciais nesses perfis. Com o aumento de  $u_0$ , o valor de  $\Lambda$  alcança menos infinito [região branca na Fig 6.4(a)] indicando que a perturbação das ondas foi capaz de efetivamente suprimir o caos temporal, produzindo padrões mais ordenados. De fato, as Figs. (6.1 a 6.3) mostram que os padrões espaço-temporais tornam-se arrastados pela perturbação externa, oscilando com as mesmas frequências. Vale destacar que os valores críticos de  $u_0$ , acima dos quais o valor de  $\Lambda$  vai para menos infinito, ficam em uma linha reta com inclinação negativa. Na figura 6.4(b), o valor de  $\Lambda$  é plotado em função da frequência de onda  $\omega$  e a não linearidade  $\alpha$ . Aqui observamos que o efeito da frequência crescente é perceptível apenas para pequenos valores de  $\omega$ , um fato já observado nas regiões espaço-temporais das Figs.(6.1-6.3)



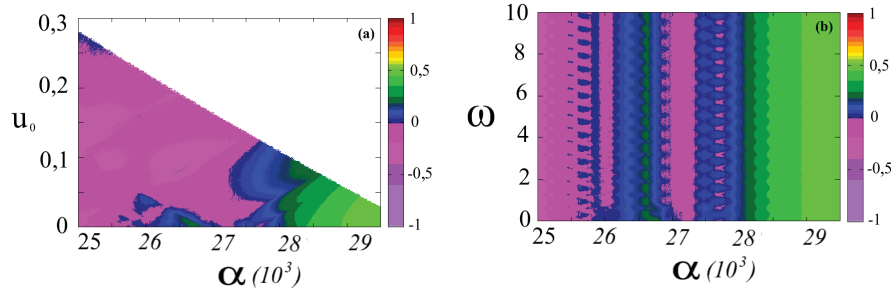


Figura 6.4: Expoente local de Lyapunov (em escala de cores) em função dos pares de parâmetros (a) Amplitude da onda  $u_0$  e não linearidade  $\alpha$  para  $\omega = 10$  (b) frequência da onda  $\omega$  e não linearidade  $\alpha$  para  $u_0 = 0.04$

O efeito de diferentes amplitudes e frequências da onda em função do aumento da não linearidade também pode ser visto na Fig.(6.5), onde plotamos o expoente local  $\Lambda$  como uma função de  $\omega$  para três amplitudes diferentes  $u_0 = 0,02$ ,  $u_0 = 0,04$  e  $u_0 = 0,08$  e diferentes parâmetros de não linearidade. Na Fig. 6.5(a) obtido para  $\alpha = 26\,000$  e  $\varepsilon = 0,01$  (para o qual o sistema não forçado exibe padrões aleatórios congelados), vemos uma diminuição no expoente Lyapunov à medida que aumentamos a amplitude da perturbação, em outras palavras, ocorre uma diminuição no caos espaço-temporal no plasma e esse efeito é praticamente independente da frequência da onda. A Figura 6.5(b), para  $\alpha = 28\,200$  e  $\varepsilon = 0,01$  (região dos defeitos caóticos), tem uma diminuição de  $\Lambda$  com  $u_0$  e um aumento leve com  $\omega$ . As mesmas características são mostradas na 6.5(c) para  $\alpha = 28\,300$  e  $\varepsilon = 0,01$  (intermitência espaço-temporal). A frequência de oscilação tem uma leve influência no aumento do expoente de Lyapunov, mais proeminente em 6.5(b) e menor em 6.5(c). Essa influência da frequência  $\omega$  é tão pequena que na Fig. 6.4 esse efeito é quase imperceptível.



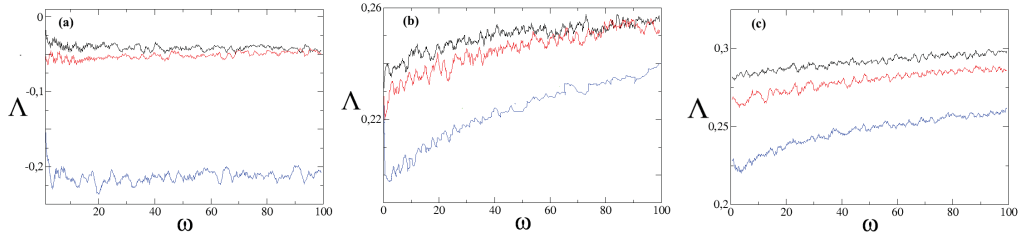


Figura 6.5: Expoente local de Lyapunov  $\Lambda$  versus  $\omega$  para  $u_0 = 0,02$  (curvas em preto),  $u_0 = 0,04$  (curvas em vermelho) e  $u_0 = 0,08$  (curvas em azul) para (a)  $\alpha = 26\,000$  e  $\varepsilon = 0,01$ ; (b)  $\alpha = 28\,200$  e  $\varepsilon = 0,01$ ; (c)  $\alpha = 28\,300$  e  $\varepsilon = 0,01$

## 6.2 Função de correlação espacial

Outro índice quantitativo que podemos usar para caracterizar padrões espaço-temporais e a influência da perturbação da onda é a chamada função de correlação espacial [76], que tem sido usada para investigar muitos efeitos dinâmicos em sistemas espacialmente estendidos. Para um tempo fixo  $\tau = k\Delta\tau$ , a média espacial da densidade normalizada para o sistema é

$$\langle u \rangle_\tau = (1/N) \sum_{j=1}^N u(\rho = j\Delta\rho, \tau), \quad (6.8)$$

e o desvio correspondente desta média é

$$\hat{u}(\rho = j\Delta\rho, \tau) = u(\rho = j\Delta\rho, \tau) - \langle u \rangle(\tau). \quad (6.9)$$

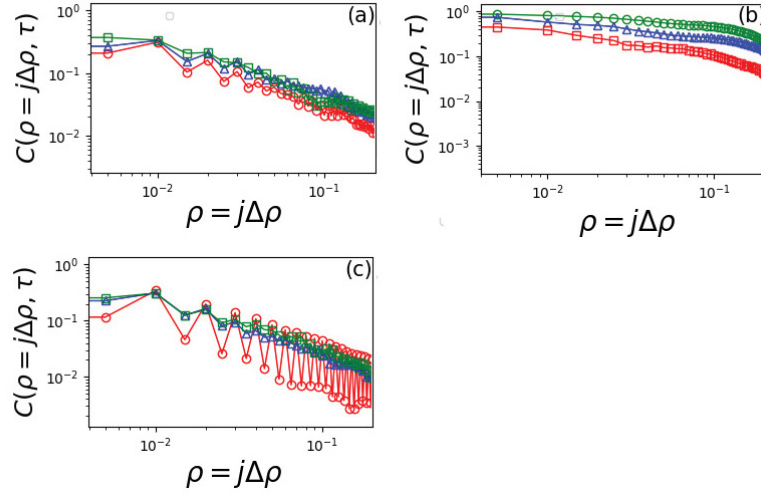


Figura 6.6: Função de correlação espacial em função da separação da rede em tempo fixo  $\tau = 10$ ,  $\varepsilon = 0,01$  and  $\omega = 10$ . (a)  $\alpha = 26\,000$ , (b)  $\alpha = 28\,200$  e (c)  $\alpha = 28\,300$

Definimos a função de correlação espacial, que caracteriza a correlação entre os diferentes sítios individuais da rede, como [76]

$$C(\rho = j\Delta\rho, \tau) = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{u}(\rho = i\Delta\rho, \tau) \hat{u}(\rho = (i+j)\Delta\rho, \tau)}{\sum_{i=1}^N \hat{u}(\rho = j\Delta\rho, \tau)^2}. \quad (6.10)$$

A definição acima é semelhante à função de correlação temporal de uma série temporal, a diferença é que consideramos médias espaciais ao invés de médias temporais, e os valores considerados em (6.10) são tomados em um tempo fixo.

Mostramos na Fig. 6.6 a dependência da correlação espacial em uma separação espacial  $j\Delta\rho$  ao longo da rede, para três perfis espaço-temporais diferentes com e sem perturbação. Para todos os casos, nós tomamos um tempo fixo  $\tau = 10$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\omega = 10$  e diferentes valores de  $\alpha$  e  $u_0$ . Na Fig. 6.6(a), consideramos  $\alpha = 2,60 \times 10^4$ , onde temos o padrão aleatório congelado sem perturbação (curva vermelha). Os dados foram bem ajustados por uma lei de potência na forma

$$C(\rho = i\Delta\rho, \tau) = C_0(j\Delta\rho)^{-\gamma}, \quad (6.11)$$

onde o expoente de decaimento é  $\gamma = 0,0575$  [Tabela 6.1] com coeficiente de regressão  $R^2 = 0.9294$ , que é definido por

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (C(\rho = i\Delta\rho, \tau) - \hat{C}(\rho = i\Delta\rho, \tau))^2}{\sum (C(\rho = i\Delta\rho, \tau) - \bar{C})^2}, \quad (6.12)$$

onde  $\hat{C}(\rho = i\Delta\rho, \tau)$  é o valor de correlação ajustada e  $\bar{C}$  é o valor médio correspondente. Quando mais próximo de um, mais representativo é a regressão.

Após a aplicação de uma onda externa com amplitude  $u_0 = 0,04$  (curva azul), a correlação espacial também decai como uma lei de potência com expoente 0,053, que é levemente menor que no caso não perturbado. Aumentando a amplitude da onda  $u_0 = 0,08$  (curva verde) o expoente de decaimento diminui para 0,039, indicando um decaimento mais lento e uma desordem decrescente no perfil espaço-temporal em relação à amplitude da onda aplicada.

As mesmas observações podem ser feitas para o caso representado na Fig. 6.6 (b), onde  $\alpha = 2,70 \times 10^4$ . O caso não perturbado (curva vermelha) corresponde a seleção de padrão, e o decaimento da lei de potência ocorre com um expoente menor 0,046. A aplicação da onda externa (curvas azul e verde) produz um decaimento mais lento da lei de potência, sugerindo também uma diminuição da desordem espacial causada pela onda.

Um comportamento semelhante também pode ser identificado na Fig. 6.6(c), onde  $\alpha = 2,82 \times 10^4$ , correspondendo a defeitos caóticos quando não perturbados. A novidade é que há um comportamento oscilante da função de correlação espacial para o caso não perturbado. Isso pode ser devido à existência de padrões de ziguezague em ambos os lados de um defeito caótico, conforme observado nas redes de mapas acoplados. A queda se torna mais regular, no entanto, conforme a perturbação da onda é ativada, com um expoente de queda ligeiramente menor refletindo um efeito relativamente suave da onda externa.

Existem alguns argumentos que podem ser usados para justificar as conclusões tiradas sobre o decaimento da função de correlação espacial. Partimos do pressuposto de que as correlações espaciais (em tempo fixo) são para os perfis espaciais assim como as correlações temporais (em posição fixa) são para as séries temporais. Os últimos foram amplamente estudados no contexto da dinâmica não linear.

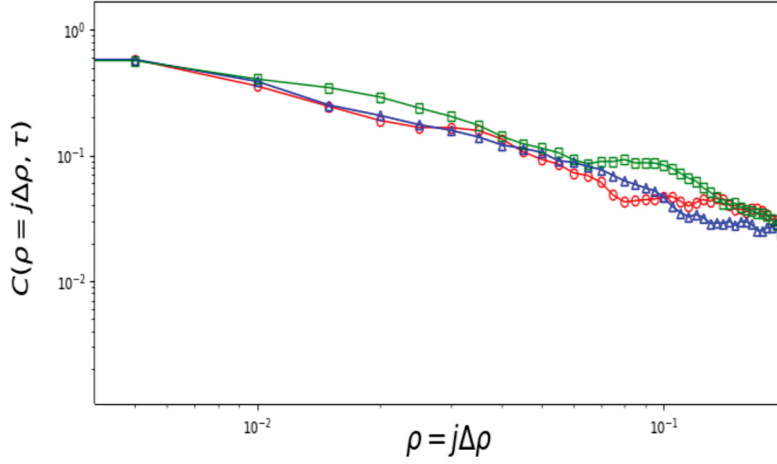


Figura 6.7: Função de correlação espacial em função da separação da rede em tempo fixo  $\tau = 10$ ,  $\varepsilon = 0,01$  and  $\omega = 10$  com  $\alpha = 30000$  para curva vermelha( $u_0 = 0$ ), curva azul( $u_0 = 0.001$ ) e curva verde ( $u_0 = 0,0015$ )

$\alpha/10^4$	$u_0$	$C_0$	$\gamma$	$R^2$
2,6	0,0	1,057	0,0575	0,9294
2,6	0,04	1,053	0,0531	0,9542
2,6	0,08	1,042	0,0393	0,9623
2,7	0,0	1,653	0,04586	0,9346
2,7	0,04	1,271	0,02290	0,9531
2,7	0,08	1,095	0,0931	0,9345
2,82	0,0	1,047	0,0438	0,9294
2,82	0,04	1,044	0,0399	0,9532
2,82	0,08	1,034	0,0336	0,9492

Tabela 6.1: Coeficientes da função ajustada em função da amplitude da perturbação para diferentes valores de  $\alpha$ .

Para sistemas caóticos hiperbólicos, as correlações temporais decaem exponencialmente com o tempo [77]. Para órbitas caóticas de sistemas não hiperbólicos com preservação de área, foi demonstrado que as correlações de tempo decaem como uma lei de potência [78]. O último é um comportamento causado por trechos de comportamento quase periódico numa órbita caótica perto o suficiente de uma ilha periódica [79].

$\alpha/10^4$	$u_0$	$C_0$	$\gamma$	$R^2$
3,0	0,0	0,9115	70,9074	0,9099
3,0	0,001	0,9063	67,4158	0,9122
3,0	0,0015	0,8350	47,1199	0,9174

Tabela 6.2: Coeficientes da função exponencial ajustada em função da amplitude da perturbação para diferentes valores de  $\alpha$ .

Usando a analogia mencionada acima, se um perfil espacial é altamente desordenado, seria razoável especular que as correlações espaciais também decaem exponencialmente. No entanto, uma vez que a desordem espacial não é completamente caótica nos padrões espaço-temporais, esperamos um decaimento na forma da lei de potência das correlações espaciais, o que se aplica aos casos representados na Fig. 6.6. A partir da analogia com o caso temporal, quanto mais ordenado espacialmente é o padrão, mais lento será o declínio da correlação espacial, e é isso que observamos após a aplicação da onda externa.

Para completarmos o nosso argumento, consideramos o padrão caos espaço-temporal completamente desenvolvido, regime onde toda a rede apresenta turbulência. Como já mencionado é de se esperar um decaimento exponencial em função de  $\rho$ . Essa característica é mostrada na figura 6.7, onde plotamos três curvas, vermelha para o caso não perturbado, azul com uma perturbação com amplitude  $u_0 = 0,001$  e verde com amplitude  $u_0 = 0,0015$ . Podemos ajustar uma função exponencial na forma

$$C(\rho = i\Delta\rho, \tau) = C_0 e^{-j(\Delta\rho)\gamma} \quad (6.13)$$

onde novamente podemos observar a influência da perturbação externa em função da amplitude. Na [Tabela 6.2] observamos novamente os coeficientes da função ajustada para cada amplitude aplicada. Novamente observamos uma diminuição no decaimento da função exponencial conforme aumentamos a amplitude, concordando com os resultados anteriores, mesmo para o padrão com turbulência completamente desenvolvida.

6.6

## Capítulo 7

### Conclusões

Os plasmas são amplamente conhecidos por exibir uma ampla variedade de dinâmicas complexas, pois são sistemas dissipativos contínuos não lineares com muitos graus de liberdade. A transição de um plasma homogêneo e bem comportado para um cenário com caos espaço-temporal é o principal problema da física de plasma teórica e está longe de ser totalmente entendido. Nessa tese abordamos esse problema a partir de um ponto de vista reducionista, o tratando como um único fluido sofrendo três processos simultâneos: difusão ambipolar, ionização e recombinação. Os dois últimos processos podem ser vistos coletivamente como um tipo de reação não linear, que produz características espacialmente localizadas, suavizadas pelo efeito de difusão. O atual resultado da dinâmica espaço-temporal é o resultado da competição entre esses efeitos tipicamente antagônicos.

A partir de um modelo unidimensional de um sistema não linear de reação-difusão com condições de contorno de Dirichlet (o plasma confinado por uma parede condutora), foi possível obter uma variedade surpreendentemente rica de comportamento dinâmico, tal como padrão aleatório congelado, defeitos caóticos, intermitência espaço-temporal e caos espaço-temporal. Algumas características qualitativas desses padrões podem ser explicados pela noção de comprimento de onda natural, que nos dá uma boa estimativa do comprimento dos domínios espaciais, como função da não linearidade e acoplamento.

Aqui utilizamos duas modelagens numéricas distintas: redes de mapas acoplados e diferença finita implícita. A partir dessas duas modelagens numéricas, fomos capazes de obter o comportamento dinâmico do plasma, obtendo os mesmos padrões (padrão aleatório congelado, defeitos caóticos, intermitência espaço-temporal e caos espaço-temporal) em ambos os métodos.

O modelo de redes de mapas acoplados foi obtido discretizando a equação ao considerarmos que os termos de fontes (ionização e recombinação) atuam em pulsos periódicos. Através da competição entre esses parâmetros (ionização e recombinação) conduziu aos padrões dinâmicos: padrão aleatório congelado, defeitos caóticos, intermitência espaço-temporal e caos espaço-temporal, ao qual, identificamos no diagrama de fases 4.1. No primeiro padrão (padrão aleatório congelado) foi observado a formação de grandes domínios caóticos com domínios menores possuindo movimentos regulares. O nome de “padrão aleatório congelado” vem do fato que, após o transiente, a fronteira desses domínios (kinks e anti-kinks) se fixam no espaço e não variam mais com o tempo. A quantidade e tamanho desses domínios dependem das condições iniciais. A seleção de padrão é o resultado da competição da não linearidade e da força de acoplamento. Essa competição divide os grandes domínios caóticos em domínios menores e com movimentos regulares simples (período 8,4,2), esses movimentos com formato de zigue-zague são os resultados do cancelamento dessas duas tendências, após essa seleção, os domínios em zigue-zague ficam estáveis e constantes no tempo. Podemos concluir que a competição desses dois parâmetros tendem a selecionar os movimentos mais simples e com menor expoente de Lyapunov. Após a formação desse padrão periódico, conforme aumentamos a não linearidade, foi observado a formação de certas regiões caóticas limitadas em alguns sítios, esse padrão foi chamado de “padrão de formação de defeitos”. Utilizando o espectro de Lyapunov, concluímos que esses defeitos são caóticos e todo caos da rede está contido nessas regiões. Como esses defeitos não são estáticos, ou seja, eles se movem pela rede, observou-se através do coeficiente de difusão e da entropia de recorrência que esse movimento é um movimento browniano determinístico e que sua dinâmica pode ser melhor caracterizada por um sinal estocástico caracterizado por um espectro de potência. O determinismo do movimento é esperado pelo simples fato do mapa ser determinístico. Outra característica observada na formação desses defeitos advém do fato de serem transitórios, ou seja, após um grande transiente, eles se aniquilam ou em pares ou quando atingem o limite do plasma. A partir de um certo valor da não linearidade esses defeitos começam aglutinar-se numa espécie de explosões e os sítios caóticos começam a espalhar-se pela rede até atingirem o caos espaço-temporal completamente desenvolvido. Esse padrão é conhecido como intermitência espaço-temporal. Os dois padrões (defeito e intermitência) só ocorrem para força de acoplamento baixo como foi visto anteriormente. No caos espaço-temporal completamente desenvolvido todos os sítios são caóticos. Outro comportamento interessante que foi estudado através da entropia KS, foi que, conforme aumen-

tamos a força de acoplamento(difusão), há uma tendência na diminuição do caos na rede, mantendo a não linearidade constante. Esse conflito entre a difusão e a ionização leva a formação de vários padrões, como visto no diagrama de fases e na entropia KS, mas é muito importante destacar que, essa diminuição não é igual para todos os valores de ionização. Essa característica é esperada pelo simples fato da não linearidade (ionização), devido à sensibilidade das condições iniciais, tender a deixar o sistema heterogêneo a partir de um determinado valor; por outro lado, a difusão sempre tende a tornar o sistema mais homogêneo.

Através da integração direta da equação de reação-difusão conseguimos recuperar toda essa dinâmica encontrada nas redes de mapas acoplados. Para caracterizar esses mesmos padrões encontrados na integração direta da equação diferencial parcial do sistema de reação-difusão, tivemos que empregar o expoente de Lyapunov local, que representa a média da desordem espaço-temporal da variável de estado. Por exemplo, o regime de seleção de padrão mostrado no diagrama de fase (em Fig. 5.6) corresponde a região de expoente de Lyapunov local negativo (Fig. 5.15). O padrão aleatório congelado do diagrama (a faixa vertical na 5.6) corresponde a pequenos expoentes positivos. Finalmente, a região de caos espaço-temporal completamente desenvolvido corresponde aos expoentes positivos mais altos, como esperados.

Integrando diretamente a equação de reação-difusão, mostramos que os defeitos caóticos são também possíveis no modelo contínuo de espaço-temporal e também apresentam propriedades estatísticas similares ao movimento Browniano com memória.

No modelo de reação-difusão utilizado nas duas simulações anteriores, apenas um tipo de injeção de energia foi representada para a ionização do plasma, que ocorre devido a colisão das partículas e também devido ao campo elétrico externo. Porém, ao injetar uma onda eletrostática externa fomos capazes de suprimir ou mitigar o caos espaço-temporal ou desencadear esse efeito. Trabalhando com os três principais padrões (padrão aleatório congelado, defeitos caóticos e intermitência espaço-temporal), observamos que, ao aplicar uma onda externa a esses perfis, ocorre uma destruição parcial da dinâmica desses padrões, forçando o plasma a oscilar na mesma frequência da onda aplicada. Há também uma diminuição do caos espaço-temporal, conforme aumentamos a amplitude da onda aplicada, isto é, a onda externa atua para diminuir essas regiões caóticas.

Outra análise que confirma essa diminuição no caos espaço-temporal foi realizada pela correlação espacial, onde observamos uma diminuição no decaimento da correlação em função da amplitude da onda, confirmando essa característica de supressão do caos, já demonstrada pelo ex-



poente médio de Lyapunov. Também ajustamos uma função na correlação espacial, mostrando que essa correlação tem uma forma de função exponencial mais uma lei de potência, onde há uma clara tendência de aumento nos expoentes devido à amplitude da perturbação. Em resumo, observamos que a aplicação de uma onda externa estacionária a um plasma não-magnético fracamente ionizado, descrito por um único modelo de fluido em uma dimensão, produz uma supressão do caos espaço-temporal nesse plasma. Além disso, foi possível modular o padrão espacial usando essas ondas. Nossos resultados sugerem a possibilidade de diminuir padrões caóticos espaço-temporais em plasmas limitados de ionização fraca por aplicação adequada de ondas estacionárias.

Esses resultados nos encorajam para trabalhos futuros, estendendo esse modelo para incluir vários efeitos físicos, por exemplo, a difusão ambipolar utilizada nesse modelo tem um coeficiente de difusão constante. Também enfatizamos que o presente modelo apenas se aplica a plasmas não magnetizados fracamente ionizados descrito pelo modelo de um único fluido em uma dimensão espacial. O efeito de um campo magnético, por exemplo, pode ser analisado em três dimensões dentro do reino da magnetohidrodinâmica ou no modelo de dois fluidos, onde tal modelo contém duas equações de reação-difusão, uma para os íons e outra para os elétrons. O objetivo futuro é tratar esses novos modelos.

## REFERÊNCIA

- [1] F.F. Chen. *Plasma physics and controlled fusion*, volume 1. Plenum Press, New York, 1984.
- [2] J.G. Berryman. Evolution of a stable profile for a class of nonlinear diffusion equations with fixed boundaries. *Journal of Mathematical Physics*, 18(11):2108–2115, 1977.
- [3] M. A. Lieberman A.J. Lichtenberg. *Regular and stochastic motion*. Springer-Verlag, 1983.
- [4] J. Wesson. *Tokamak*. Oxford Science Publications, EUA, 1987.
- [5] H. Wilhelmsson. Similarity solution of two coupled reaction-diffusion rate equations. *Phys. Rev. A*, 35:1957–1958, 1987.
- [6] I.T. Pedron e R. dos Santos Mendes. Difusão anômala e equações generalizadas de difusão. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 27:251 – 258, 2005.
- [7] H. Wilhelmsson. *Reaction-Diffusion Problems in the Physics of Hot Plasmas*. Z. Physik 225, Sweden, 2001.
- [8] M.A. Lieberman e A. J. Lichtenberg. *Principles of Plasma Discharges and Materials Processing*. Wiley, New York, second edition, 2005.
- [9] J.A. Bittencourt. *Fundamentals of Plasma Physics*. Springer, third edition, 2004.
- [10] P.O.J. Scherer e S. F. Fischer. *Reaction–Diffusion Systems*. Theoretical Molecular Biophysics. Biological and Medical Physics, Biomedical Engineering. (Springer, Berlin-Heidelberg), 2017.
- [11] Lin I. J.H. Chu. Quasiperiodic transition to spatiotemporal chaos in weakly ionized magnetoplasmas. *Phys. Rev. A*, 39:233–238, 1989.

- [12] D. Kremp e M. Schlanges e M. Bonitz e T. Bornath. Reaction and diffusion in dense nonideal plasmas. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, 5:216–229, 1993.
- [13] H. Wilhelmsson. Simultaneous diffusion and reaction processes in plasma dynamics. *Phys. Rev. A*, 38:1482–1489, 1988.
- [14] P. G. Ernest e E. K. Donald. The diffusion equation with a quadratic loss term applied to electron-ion volume recombination in a plasma. *Annals of Physics*, 17:276 – 300, 1962.
- [15] V. K. Vanag e I. R. Epstein. Localized patterns in reaction-diffusion systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 17:037110, 2007.
- [16] H. Chaté e P. Manneville. Spatio-temporal intermittency in coupled map lattices. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 32:409 – 422, 1988.
- [17] U. Frisch. *Turbulence: The Legacy of A. Kolmogorov*. Cambridge, 1995.
- [18] D. Ruelle e F. Takens. On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, 20:167-192, 1971.
- [19] Floris Takens. *Detecting strange attractors in turbulence*. Springer Berlin Heidelberg, 1981.
- [20] R. A. Fisher. The wave of advance of advanceous genes. *Ann. Eugen.*, 7,355-369(4), 1937.
- [21] Edward Ott. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press, 1993.
- [22] L. H. A Monteiro. *Sistemas dinâmicos*. Editora Livraria da Física, 2 edition, 2006.
- [23] G. C. Layek. *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 2015.
- [24] K. Kaneko. Pattern dynamics in spatiotemporal chaos: Pattern selection, diffusion of defect and pattern competition intermettency. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 34(1):1 – 41, 1989.
- [25] K. Kaneko. Period-Doubling of Kink-Antikink Patterns, Quasiperiodicity in Antiferro-Like Structures and Spatial Intermittency in Coupled Logistic Lattice\*): Towards a Prelude of a “Field Theory of Chaos”. *Progress of Theoretical Physics*, 72(3):480–486, 1984.

- [26] K. Kaneko e I. Tsuda. *Networks of Chaotic Elements*, pages 107–161. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2001.
- [27] K. Eytan e F. C. Leticia. Coupled logistic maps and non-linear differential equations, 2005.
- [28] J.P. Crutchfield e K. Kaneko. *Phenomenology of Spatio-Temporal Chaos*. World Scientific Publishing, Singapore, 1987.
- [29] S. T. da Silva e T. L. Prado e S. R. Lopes e R. L. Viana. Correlated brownian motion and diffusion of defects in spatially extended chaotic systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 29(7):071104, 2019.
- [30] Morten Hjorth-Jensen. *Computational Physics*, volume 1, p.300 - 325. Department of Physics, University of Oslo, 2015.
- [31] S.R. Lopes e T.L. Prado e G. Corso e G.Z. dos S. Lima e J. Kurths. Parameter-free quantification of stochastic and chaotic signals. *Chaos, Solitons and Fractals*, 133:109616, 2020.
- [32] C. Mei-Chu e T. Ya-Yi e I. Lin. Observation of 3d defect mediated dust acoustic wave turbulence with fluctuating defects and amplitude hole filaments. *Physics of Plasmas*, 20(8):083703, 2013.
- [33] J.D. Keeler e J.D. Farmer. Robust space-time intermittency and  $1/f$  noise. 23,413, 1986.
- [34] H. Shibata. Lyapunov exponent of partial differential equation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 264(1):226 – 233, 1999.
- [35] M.A. Savi. *Dinâmica não-linear e caos*. Applied Mathematical Sciences 38. Editora E-papers, Rio de Janeiro, 1a edição edition, 1983.
- [36] G Conway. Turbulence measurements in fusion plasmas. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 50:124026, 11 2008.
- [37] P. Manneville. *Dissipative Structures and Weak Turbulence*. Springer, Academic, San Diego, 1990.
- [38] H. Pécseli. *Fluctuations in Physical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

- [39] T. Kapitaniak. *Controlling Chaos*, pages 111–135. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2000.
- [40] T. Klinger e C. Schröder e D. Block e F. Greiner e Piel e G. Bonhomme e V. Naulin. Chaos control and taming of turbulence in plasma devices. *Physics of Plasmas*, 8(5):1961–1968, 2001.
- [41] C. Schröder e T. Klinger e D. Block e A. Piel e G. Bonhomme e V. Naulin. Mode selective control of drift wave turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 86:5711–5714, 2001.
- [42] H. Shibata. Quantitative characterization of spatiotemporal patterns. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 253(1):134 – 142, 1998.
- [43] J.M. Houlrik e M.H. Jensen. Critical correlations in coupled map lattices. *Physics Letters A*, 163(4):275 – 278, 1992.
- [44] S. T. da Silva e R. L. Viana. Reaction-diffusion equation with stationary wave perturbation in weakly ionized plasmas. *Brazilian Journal of Physics, aceito*.
- [45] D.B. Vasconcelos e R.L. Viana e S.R. Lopes e A.M. Batista e S.E. de S. Pinto. Spatial correlations and synchronization in coupled map lattices with long-range interactions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 343:201 – 218, 2004.
- [46] H. Shibata. Ks entropy and mean lyapunov exponent for coupled map lattices. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 292(1):182 – 192, 2001.
- [47] S. Isola e A. Politi e S. Ruffo e A. Torcini. Lyapunov spectra of coupled map lattices. *Physics Letters A*, 143(8):365 – 368, 1990.
- [48] J. P. Crutchfield. Space-time dynamics in video feedback. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 10(1):229 – 245, 1984.
- [49] P. Garcia e A. Parravano e M. G. Cosenza e J. Jimenez e A. Marcano. Coupled map networks as communication schemes. *Phys. Rev. E*, 65:045201, 2002.
- [50] H. Yang e K. A. Takeuchi e F. Ginelli e H. Chate e G. Radons. Hyperbolicity and the effective dimension of spatially extended dissipative systems. *Phys. Rev. Lett.*, 102:074102, 2009.

- [51] M. Bär e R. Hegger e H. Kantz. Fitting partial differential equations to space-time dynamics. *Phys. Rev. E*, 59:337–342, 1999.
- [52] R. M. Itami. Simulating spatial dynamics: cellular automata theory. *Landscape and Urban Planning*, 30(1):27 – 47, 1994. Special Issue Landscape Planning: Expanding the Tool Kit.
- [53] H. Poincaré. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Math*, 13:1–270, 1890.
- [54] K. Kaneko. *Theory and Applications of Coupled Map Lattices*. Wiley, Chichester, 1993.
- [55] W. T. Vetterling B. P. e Flannery H. W. Press, S. A. Teukolsky. *Numerical Recipes in C: The art of scientific computing*. Cambridge University Press, 1992.
- [56] M. Latora, V. e Baranger. Kolmogorov-sinai entropy rate versus physical entropy. *Phys. Rev. Lett.*, 82:520–523, 1999.
- [57] B. C. Smith e P. F. Lang. Ionization energies of atoms and atomic ions. *Journal of Chemical Education*, 80:938, 2003.
- [58] J. B. Russel. *Química geral*. Applied Mathematical Sciences 38. Makron Books, São Paulo, 2nd ed edition, 2004.
- [59] D. Chandler. *Introduction to Modern Statistical Mechanics*. Oxford University Press, New York, 1987.
- [60] A. Fridman e L. A. Kennedy. *Plasma Physics and Engineering*. RC Press, Boca Raton, 2 edition, 2011.
- [61] Y. Itikawa. *Molecular Processes in Plasmas: Collisions of Charged Particles with Molecules*. Springer, 2007.
- [62] M. Schlages and T. Bornath. Contrib. plasma phys. 29,527-536, 1989.
- [63] Z. Guo Y. Du. The stefan problem for the fisher-kpp equation. *Journal of Differential Equations*, 253(3):996 – 1035, 2012.
- [64] D. G. Aronson e H. F. Weinberger. Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation. in: *Partial Differential Equations and Related Topics*, in: *Lecture Notes in Math*, 446:5–49, 1975.

- [65] I. Petrovskii e N. Piskunov A. Kolmogorov. *An english translation is available in Selected Works of A. N. Kolmogorov*, Bull. Moscow Univ., Math. Mech. 1, 1, volume I, 248–270. Bull. Moscow Univ., Math. Mech. 1, 1, Ed. V.M. Tikhomirov, 1937 (Kluwer, 1991).
- [66] M. J. Ablowitz e A. Zeppetella. Explicit solutions of fisher’s equation for a special wave speed. *Bull. Math. Biology*, 41:835, 1979.
- [67] G. W. Griffiths e W. E. Schiesser. *Traveling wave analysis of Partial Differential Equations*. Elsevier, 2012.
- [68] S.O. Kamphorst e D. Ruelle J.P. Eckmann. Recurrence plots of dynamical systems. *Europhysics Letters*, 4:963, 1987.
- [69] J. P. Zbilut e C. L. Webber. Embeddings and delays as derived from quantification of recurrence plots. *Europhys. Lett.*, 4:963, 1987.
- [70] N.B. Franco. *Cálculo numérico*. São Paulo: Person Prentice Hall, 2006.
- [71] W.E. Boyce e R.C. DiPrima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Rio de Janeiro: LTC, 2002.
- [72] M. A. G. Ruggiero e V. L. R Lopes. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. São Paulo: Pearson Makron Books, 2nd edition, 1996.
- [73] L.H. Thomas. Elliptic problems in linear differential equations over a network. *Watson Sci. Comput. Lab Report, Columbia University, New York*, 1949.
- [74] S. T. da Silva, T. de L. Prado, I. L. Caldas, S. R. Lopes, and R. L. Viana. Pattern formation, spatiotemporal chaos, and chaotic defect motion in reaction-diffusion weakly ionised plasmas. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, submetido.
- [75] H. Shibata. Quantitative characterization of spatiotemporal patterns ii. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 260(3):374 – 380, 1998.
- [76] M.H. Jensen J.M. Houlrik. Critical correlations in coupled map lattices. *Physics Letters A*, 163(4):275 – 278, 1992.
- [77] H. Fujisaka e T. Yamada. Theoretical study of time correlation functions in a discrete chaotic process. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 33(12):1455 – 1460, 1978.

- [78] C. F.F. Karney. Long-time correlations in the stochastic regime. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 8(3):360 – 380, 1983.
- [79] G. Contopoulos e M. Harsoula. Stickiness in chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 18(10):2929–2949, 2008.



# Apêndice A

## Artigo

No apêndice apresento os artigos já publicados, resultante do nosso trabalho.

O primeiro artigo, "Correlated Brownian motion and diffusion of defects in spatially extended chaotic systems", reúne alguns dos resultados referentes as redes de mapas acoplados do tipo reação-difusão, focando na dinâmica dos defeitos caóticos.

O segundo artigo, "Reaction-Diffusion Equation with Stationary Wave Perturbation in Weakly Ionized Plasmas", reúne os resultados referentes a equação de reação-difusão com perturbação de ondas estacionárias em plasmas fracamente ionizados, tratados no capítulo 6.

# Correlated Brownian motion and diffusion of defects in spatially extended chaotic systems

Cite as: Chaos **29**, 071104 (2019); <https://doi.org/10.1063/1.5113783>

Submitted: 07 June 2019 . Accepted: 29 June 2019 . Published Online: 16 July 2019

S. T. da Silva, T. L. Prado, S. R. Lopes , and R. L. Viana 



View Online



Export Citation



CrossMark

AIP Author Services  
English Language Editing



# Correlated Brownian motion and diffusion of defects in spatially extended chaotic systems

Cite as: Chaos 29, 071104 (2019); doi: 10.1063/1.5113783

Submitted: 7 June 2019 · Accepted: 29 June 2019 ·

Published Online: 16 July 2019




View Online



Export Citation



CrossMark

S. T. da Silva, T. L. Prado, S. R. Lopes,  and R. L. Viana<sup>a)</sup> 

## AFFILIATIONS

Department of Physics, Federal University of Paraná, 81531-990 Curitiba, Paraná, Brazil

<sup>a)</sup> Author to whom correspondence should be addressed: [viana@fisica.ufpr.br](mailto:viana@fisica.ufpr.br)

## ABSTRACT

One of the spatiotemporal patterns exhibited by coupled map lattices with nearest-neighbor coupling is the appearance of chaotic defects, which are spatially localized regions of chaotic dynamics with a particlelike behavior. Chaotic defects display random behavior and diffuse along the lattice with a Gaussian signature. In this note, we investigate some dynamical properties of chaotic defects in a lattice of coupled chaotic quadratic maps. Using a recurrence-based diagnostic, we found that the motion of chaotic defects is well-represented by a stochastic time series with a power-law spectrum  $1/f^\sigma$  with  $2.3 \leq \sigma \leq 2.4$ , i.e., a correlated Brownian motion. The correlation exponent corresponds to a memory effect in the Brownian motion and increases with a system parameter as the diffusion coefficient of chaotic defects.

Published under license by AIP Publishing. <https://doi.org/10.1063/1.5113783>

Recurrence-based diagnostics have been intensively used in recent years to unveil dynamical properties of complex dynamical systems. Subsets of recurrence plots can be analyzed as microstates, from which a recurrence entropy can be defined in the same way as in information theory. By imposing maximization of this entropy, it is possible to perform a parameter-free recurrence quantification analysis. One example is the motion of chaotic defects in coupled map lattices, which is known to share properties of a Brownian motion like Gaussian diffusion. We have used recurrence entropy to show that the dynamics of chaotic defects has similar properties with correlated Brownian motion with a power-law spectrum. The memory content of such motion is due to the deterministic nature of the causes underlying chaotic defect motion in a coupled map lattice. We found that the diffusion coefficient of defects has a dependence on the nonlinearity similar to the exponent of the Brownian motion power-spectrum. Our analysis can be used to investigate other time series with apparently stochastic behavior but possessing an underlying deterministic mechanism of generation.

Spatiotemporal dynamics is a subject of permanent interest in view of existing applications in many research fields, such as hydrodynamics,<sup>1</sup> condensed matter physics,<sup>2</sup> physical chemistry,<sup>3</sup> ecology,<sup>4</sup> cell biology,<sup>5</sup> and neuroscience,<sup>6</sup> among others. A great

variety of phenomena have emerged from the interplay between nonlinearity and diffusion, such as pattern formation, spatiotemporal intermittency, and turbulence (actually spatiotemporal chaos).<sup>7,8</sup> There is a hierarchy of spatially extended dynamical systems which can be used to investigate spatiotemporal dynamical features, from cellular automata—where space, time, and state variable are all discrete—to partial differential equations, for which the same variables are continuous.<sup>9</sup> One outstanding type of the spatiotemporal system is a coupled map lattice, for which the space and time are discrete, but with a continuous state variable.<sup>7</sup> Its relative simplicity turns numerical computations easier and faster to perform, and they have been extensively used to illustrate many interesting features like chimeras.<sup>10</sup>

One of the noteworthy features of coupled map lattices is the presence of chaotic defects, defined by Kaneko as a spatially localized chaotic region which separates domains of different phases.<sup>8,11</sup> Moreover, the defects themselves are able to move in space, with or without changes of size. Actually, the motion of a chaotic defect through the map lattice resembles a particle undergoing Brownian motion, such that an ensemble defect can diffuse. Kaneko has pointed out that, since the coupled map lattice is a deterministic system, it would not be evident that the motion of a defect is really a random walk.<sup>11</sup> This dilemma can be explained by considering that the diffusion is triggered by the chaotic motion within the defect, i.e., the randomness is created by the temporal dynamics of the defect, rather than by global properties of the coupled map lattice.

In this note, we investigate the chaotic defect motion and argue that it is in fact a Brownian motion with memory, which has similar statistical properties to truly deterministic chaotic systems, and with a power-law spectrum.<sup>13</sup> We do so by using a recently developed technique to investigate recurrence-based properties of chaotic systems, which enables us to define a quantity called recurrence entropy, and which is able to distinguish stochastic systems with memory and deterministic chaotic ones.<sup>14</sup> Recurrence plots, which form the basis of this technique, have been extensively used in a variety of applications and provide researchers with a rich toolbox to investigate nonlinear data series, particularly when the data series is short, noise, and nonstationary.<sup>15</sup>

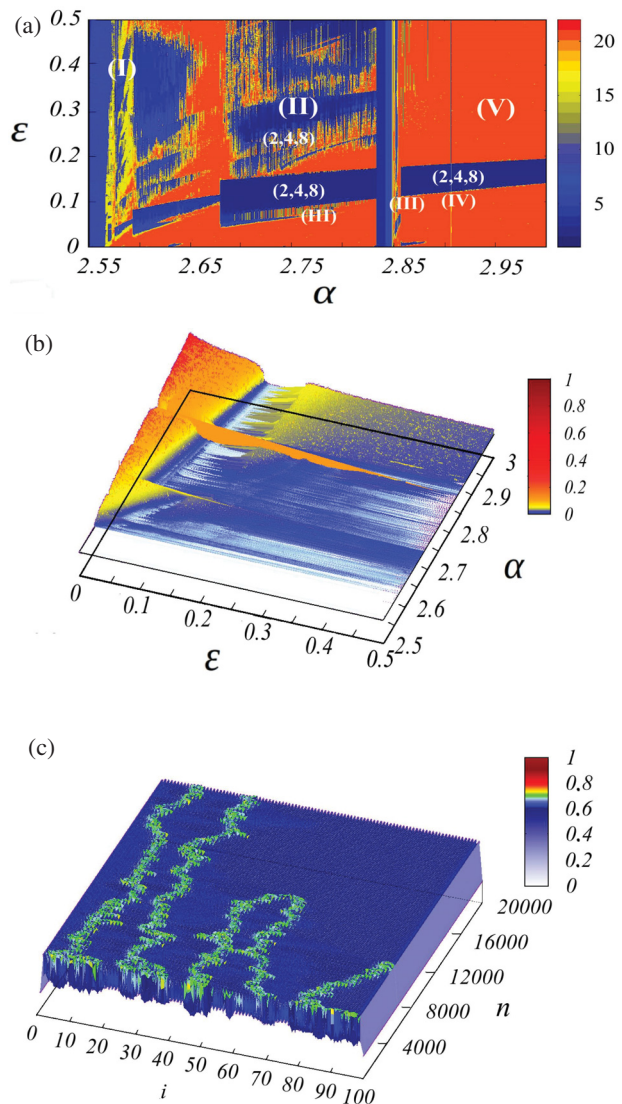
We use as a paradigmatic model of spatiotemporal dynamics the following coupled map lattice:

$$u_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(u_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} \{f(u_n^{(i+1)}) + f(u_n^{(i-1)})\}, \quad (1)$$

where  $u_n^{(i)}$  is a state variable at discrete time  $n = 0, 1, 2, \dots$  and discrete position  $i = 1, 2, \dots, N$  in a one-dimensional lattice of size  $N$ . The system at each spatial position undergoes a temporal dynamics described by a quadratic map  $f(u) = (1 + \alpha)u - \beta u^2$ , with  $0 \leq u \leq 1$ , where  $\alpha$  and  $\beta$  are system parameters, and  $\varepsilon > 0$  is the coupling strength. In the following, we fix  $\beta = 0.1$  and use  $\alpha$  as a single variable parameter. The general features of the spatiotemporal dynamics remain practically unchanged if different values of  $0 < \beta < 1$  are considered. We will consider random initial conditions over the interval  $0 \leq u_0^{(i)} \leq 1$  and fixed boundary conditions:  $u_n^{(1)} = u_n^{(N)} = 0$ .

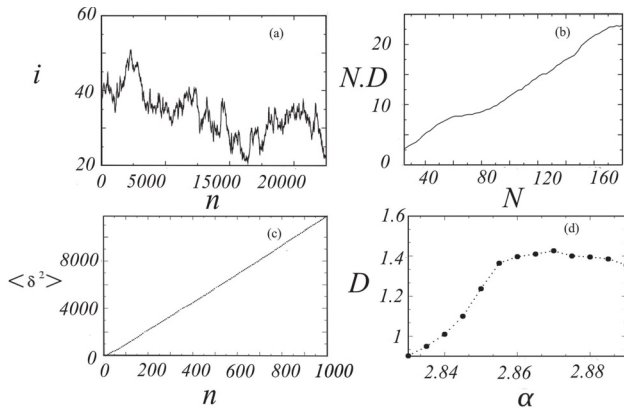
The spatiotemporal dynamics produced by the coupled map lattice (1), for given values of the chosen parameters ( $\varepsilon, \alpha$ ), can be summarized by the phase diagram depicted in Fig. 1(a), which is an isoperiodic diagram showing, for each pair ( $\varepsilon, \alpha$ ), the space-averaged periods of oscillation, which gives us an indication of the dominant temporal period exhibited by the coupled map lattice (since there can be various periodic and chaotic coexisting patterns). For a fixed time  $n_0$ , we consider the spatial profile  $u_{n_0}^{(i)}$ , consisting of various regions with different periods of oscillation and different spatial lengths. We take the space-average of these periods using the lengths as statistical weights. In this sense, the bluish regions are characterized by mostly low-period attractors (less than 10) or a predominance of ordered patterns. Some blue regions exhibit dominant patterns of well-defined periodicities, as (2, 4, 8) (pattern selection), indicated by label II in Fig. 1(a).<sup>8</sup> Frozen random patterns, for example, are characterized by high-period attractors and can be observed in the yellow strips on the left hand side (label I) of Fig. 1(a).

In the latter regions of the phase diagram, domains of large spatial size are usually unstable and domains of short wavelengths are more common. The shortest domains have wave length  $1/2$  and are called zigzag patterns. Reddish regions of the phase diagram are related to either dominant high-period or chaotic attractors observed in the regions labeled III in Fig. 1(a). One example is the chaotic defect, which is a spatially localized region of chaotic dynamics which separates zigzag regions of different phases. The region of Fig. 1(a) where chaotic defects show up is contained within the rectangle  $2.70 < \alpha < 2.89$  and  $0.05 < \varepsilon < 0.15$ . Spatiotemporal intermittency and fully developed spatiotemporal chaos are labeled as regions IV and V, respectively.



**FIG. 1.** (a) Phase diagram of the coupled map lattice (1): it depicts the dominant temporal period of the spatiotemporal attractor for given values of  $\varepsilon$  and  $\alpha$ , for  $\beta = 0.1$  and  $N = 100$ . (b) The density of KS entropy as a function of the same parameters. (c) Space-time plot of the coupled quadratic map lattice (1) for  $\varepsilon = 0.1$  and  $\alpha = 2.85$ .

The isoperiodic diagram of Fig. 1(a) is not capable of distinguishing between a high-period and a chaotic attractor. For this reason, we complement this analysis by computing the Lyapunov spectrum of the coupled map lattice  $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ . The normalized sum of the positive Lyapunov exponents is a numerical estimate for the density of Kolmogorov-Sinai (KS) entropy  $h$  shown in Fig. 1(b).<sup>12</sup> The region in the phase diagram related to the presence of chaotic defects is marked by a global decrease of the value of  $h$  with respect to regions



**FIG. 2.** (a) Motion of an individual defect. (b) Number of chaotic defects as a function of the lattice size. (c) Mean square displacement of the chaotic defects as a function of time for a lattice of  $N = 6000$  maps with  $\alpha = 2.85$ ,  $\beta = \varepsilon = 0.1$ . (d) Diffusion coefficient of defects as a function of the nonlinearity parameter  $\alpha$ .

where spatiotemporal chaos dominate. This global decrease is due to the fact that most of the lattice is occupied by zigzag patterns and only at their boundaries, chaotic defects of limited spatial size are formed.

In particular, for  $\varepsilon = 0.1$  and  $\alpha = 2.85$ , we observe in the space-time plot depicted in Fig. 1(c) the formation of chaotic defects moving with time in an irregular manner [Fig. 2(a)]. Two defects can collide and annihilate mutually or a defect can collide with some boundary and disappear. Due to either reason, it is expected that the number of defects decay to zero with time. With increasing nonlinearity, these defects become larger and their boundaries become fuzzier, allowing chaotic motion over a broader spatial range, with alternations between ordered and disordered behavior in both space and time (spatiotemporal intermittency).

As shown in Fig. 2(b), the number of chaotic defects increases with the lattice size (at fixed time). Since this increase exhibits a linear trend, it follows that the density of chaotic defects varies from 5% to 10% of the entire lattice. On the other hand, due to collisions with the boundaries and with themselves, the lifetime of the defects is expected to decay with time. The average lifetime, on the other hand, also varies with the lattice size. Chaotic defects diffuse along the lattice, in a similar manner to Brownian particles, as revealed by Fig. 2(c), where we plot a time series of the mean square displacement of an ensemble of chaotic defects  $\langle \delta^2 \rangle$  (the lattice with  $N = 6000$  maps has out of  $N_D = 260$  defects, over which the average was taken). The data can be fitted by the expression  $\langle \delta^2 \rangle = 2Dn$ , valid for Gaussian diffusion, corresponding microscopically to a random walk, where  $D \approx 1.25$  is a diffusion coefficient for the defects. Over the range of  $\alpha$ -values that present chaotic defects, we found that their diffusion coefficient varies between about 1.0 and 1.4, as shown in Fig. 2(d). Our results are qualitatively similar to those of Kaneko, who considered a different map.<sup>11</sup>

From a cursory inspection of Fig. 2(a), the evolution of a chaotic defect resembles a Brownian motion of a particle undergoing a random walk. This observation is further confirmed by the Gaussian

diffusion observed in an ensemble of such defects. Another characterization of the temporal dynamics of a defect is provided by recurrence-based techniques, which have been used in nonlinear data analysis for a long time.<sup>16,17</sup>

The recurrence plot is a tool to depict recurrences of a  $K$ -length time series and is defined as a  $K \times K$  binary matrix with elements,<sup>15</sup>

$$R_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \leq \delta, \\ 0 & \text{if } \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| > \delta, \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, K, \quad (2)$$

where  $\delta$  is the vicinity parameter,  $\|\cdot\|$  is an Euclidean norm, and  $\mathbf{x}$  represents the time series of the position along the  $x$ -direction of the center of a defect. Let  $x_n^{(d)}$  denote the position of the center of a defect at time  $n$ . Hence,  $\mathbf{x} = \{x_n^{(d)}, x_{n+1}^{(d)}, \dots, x_{n+K}^{(d)}\}$ , where  $K$  denotes the time for which the defect disappears.

The most important subsets of  $\mathbf{R}$  are diagonal lines of “ones” representing the mutual recurrences of a sequence of points, but other subsets of  $\mathbf{R}$  also have dynamical interpretations like vertical/horizontal lines related to stationary points and the abundance of isolated points, an indicative of chaotic or stochastic dynamics.<sup>15</sup>

Recently,<sup>14</sup> the concept of subsets of the recurrence plot has been generalized by using recurrence microstates,  $\mathcal{A}(\delta)$ , defined as all possible cross-recurrence states among two randomly selected short sequences of  $N$  points embedded in a  $K$  ( $K \gg N_a$ ) length time series (we use  $N_a = 4$ ), such that  $\mathcal{A}(\delta)$  are  $N_a \times N_a$  small binary recurrence matrices obtained according to Eq. (2). For a large enough randomly selected number of samples  $M$ , the recurrence entropy  $S$  is adequately computed by the Shannon formula,<sup>14</sup>

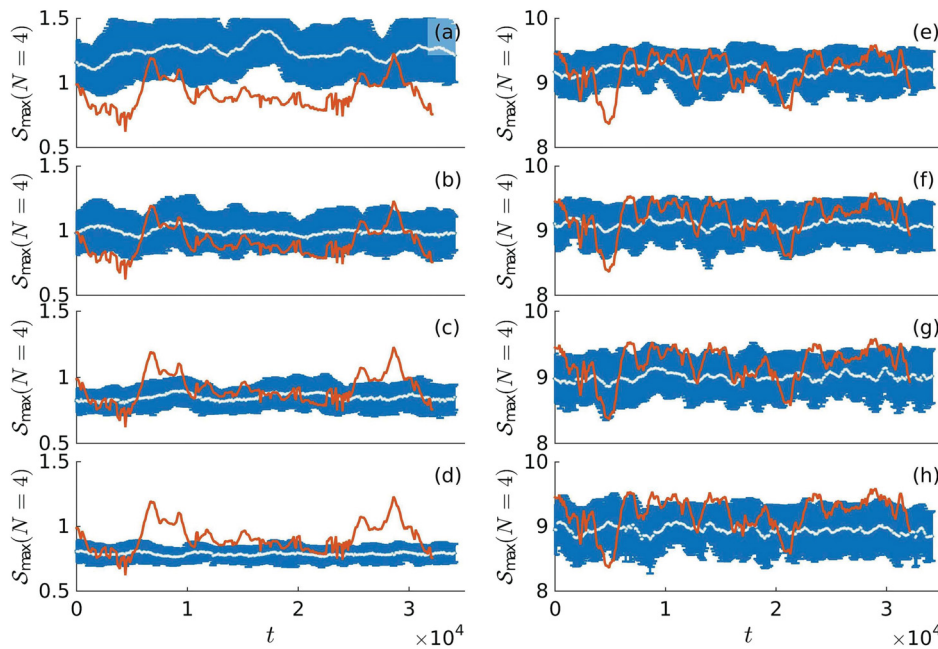
$$S(\mathcal{A}) = - \sum_{\mathcal{A}} P_{\mathcal{A}} \ln P_{\mathcal{A}}, \quad (3)$$

where  $P_{\mathcal{A}}$  measures the probability of the occurrence of one particular microstate  $\mathcal{A}(\delta)$  considering  $M$  randomly chosen samples. Usually,  $\delta$  is an adjustable parameter as Eq. (3) and  $\mathcal{A}(\delta)$  suggest, but this dependence is eliminated observing that  $S$  is null when computed for sufficiently large or small  $\delta$ .<sup>14</sup> So, we impose a natural condition of a maximum for  $S(\delta)$ <sup>18</sup> turning  $\max(S(\delta)) \equiv \max(S)$  and  $\mathcal{A}(\delta) \equiv \mathcal{A}$  into parameter-free quantities. The literature shows that  $\max(\mathcal{A})$  can be used as a parameter-free quantifier for time correlated stochastic signals displaying a power spectrum characterized by  $1/f^\sigma$ . Such a feature allows its use to quantify the dynamics of the appearance of defects over the lattice.<sup>14</sup>

Figures 3(a)–3(d) depict results for the maximal recurrence entropy  $\max(S)$  computed over the defect signals in the case  $\alpha = 2.85$ ,  $\beta = \varepsilon = 0.1$  and also using numerically generated stochastic signals characterized by a power spectrum proportional to  $1/f^\sigma$  for (a)  $\sigma = 2.1$ , (b)  $\sigma = 2.3$ , (c)  $\sigma = 2.5$ , and (d)  $\sigma = 2.7$ . We have used time series of size 30 000 windowed in 300 smaller equally spaced time series of size  $N = 1000$ . The random sampling for each windowed time series is  $M = 10^5$ . Comparing values of  $\max(S)$  computed for all signals, we are able to characterize the stochastic nature of the defect dynamics.

As observed in Figs. 3(b) and 3(c), the time evolution of both signals is similar, i.e., the defect dynamics can be better characterized by a stochastic signal characterized by a power spectrum following a power law  $1/f^\sigma$  for  $2.3 \leq \sigma \leq 2.4$ . Figures 3(e)–3(h) also show results for  $\max(S)$  computed for shuffled version of all signals.





**FIG. 3.** (a)–(d) Time series of the maximal recurrence entropy  $\max(S)$  computed for the defect signal (orange lines), superposed with the dynamical behavior of  $\max(S)$  (blue lines) computed for stochastic time correlated signals following a power-law spectrum  $1/f^\sigma$ ,  $\sigma = 2.1, 2.3, 2.5$ , and  $2.7$ , respectively. Blue areas are representative of the standard deviation of each windowed computed  $\max(S)$ . (e)–(h) Shuffled version of all signals.

For these cases, the values computed for  $\max(S)$  are all the same and reproduce the value expected for noncorrelated stochastic signals.

The value of the power-law exponent  $\sigma$ , characterizing a stochastic signal with similar maximal entropy evolution, depends on the value of the nonlinearity parameter  $\alpha$  (Fig. 4), which has already been shown to affect the diffusion coefficient of defects [see Fig. 2(d)]. For the same range of  $\alpha$  values considered in the latter figure, we found that the stochastic signals with similar recurrence properties have exponents lying between 1.8 and 2.4. It seems that a higher value of  $\sigma$  is related to the increase of the diffusion coefficient of defects. We emphasize that varying other system parameters, like  $\beta$  and  $\varepsilon$ , does not affect our results in a significant way, because we are restricted to a narrow region in the phase diagram [see Fig. 1(a)] where chaotic defects exist.

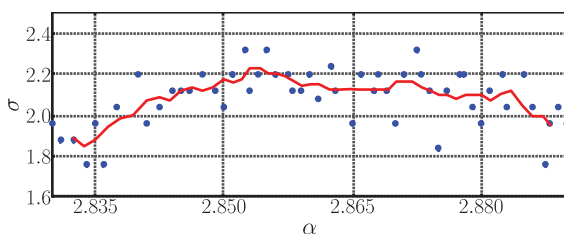
In conclusion, we have revisited the formation and dynamics of chaotic defects in lattices of coupled quadratic maps. Chaotic defects are spatially localized regions of chaotic dynamics which propagate

along the lattice in a particlelike fashion. Since we have used random initial conditions in numerical simulations, we believe that the formation of chaotic defects is quite a general phenomenon. We found that the number of defects increases with the lattice size and that defects experience a normal (Gaussian) diffusion with a diffusion coefficient around 1.25. This value was found to depend on the nonlinearity parameter  $\alpha$  of the coupled maps. The motion of individual defects is similar to a random walk, and we used a recently developed recurrence-based technique to show that it is actually a stochastic time series displaying a power-law power spectrum  $f^{-\sigma}$ , where  $\sigma$  lies between 2.3 and 2.4. The latter exponent was also found to be dependent on the nonlinearity parameter  $\alpha$ . In other words, the defect motion has recurrence properties similar to a stochastic signal with memory. We emphasize that the recurrence entropy technique used here is parameter-free, in the sense that it does not depend on *ad hoc* sampling parameters.

This work was partially supported by the Brazilian Government Agency CNPq (Grant No. 302785/2017-5).

## REFERENCES

- <sup>1</sup>M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
- <sup>2</sup>E. Schöll, *Nonlinear Spatio-Temporal Dynamics and Chaos in Semiconductors* (Cambridge University Press, 2001).
- <sup>3</sup>V. Petrov, M. F. Crowley, and K. Shoewalter, *J. Chem. Phys.* **101**, 6606 (1994).
- <sup>4</sup>J. Bascompte and R. V. Solé, *Trends Ecol. Evol.* **10**, 361 (1995).
- <sup>5</sup>O. Pertz, L. Hodgson, R. L. Klemke, and K. M. Hahn, *Nature* **440**, 1069 (2006).
- <sup>6</sup>C. M. Michel, M. Seeck, and T. Landis, *News Physiol. Sci.* **14**, 206 (1999).
- <sup>7</sup>K. Kaneko and I. Tsuda, *Complex Systems, Chaos and Beyond: A Constructive Approach with Applications in Life Sciences* (Springer, New York, 2001).
- <sup>8</sup>K. Kaneko, *Physica D* **34**, 1 (1989).




**FIG. 4.** Dependence of the power spectrum exponent  $\sigma$  of the time series of the chaotic defect position with the nonlinearity parameter  $\alpha$  of the coupled map lattice.

- <sup>9</sup>R. Badii and A. Politi, *Complexity, Hierarchical Structures and Scaling in Physics* (Cambridge University Press, 1997).
- <sup>10</sup>D. M. Abrams and S. H. Strogatz, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 174102 (2004).
- <sup>11</sup>K. Kaneko, *Europhys. Lett.* **6**, 193 (1988).
- <sup>12</sup>A. M. Batista and R. L. Viana, *Phys. Lett. A* **286**, 134 (2001).
- <sup>13</sup>J. Beran, *Statistics for Long-Memory Processes* (Chapman & Hall/CRC, 1994).
- <sup>14</sup>G. Corso, T. de L. Prado, G. Z. dos Santos, J. Kurths, and S. R. Lopes, *Chaos* **28**, 083108 (2018).
- <sup>15</sup>N. Marwan, M. C. Romano, M. Thiel, and J. Kurths, *Phys. Rep.* **438**, 237 (2007).
- <sup>16</sup>J. P. Eckmann, S. O. Kamphorst, and D. Ruelle, *Europhys. Lett.* **4**, 963 (1987).
- <sup>17</sup>J. P. Zbilut and C. L. Webber, Jr., *Phys. Lett. A* **171**, 199 (1992).
- <sup>18</sup>E. T. Jaynes, *Phys. Rev.* **106**, 620 (1957).



# Reaction-Diffusion Equation with Stationary Wave Perturbation in Weakly Ionized Plasmas

S. T. da Silva<sup>1</sup> · R. L. Viana<sup>1</sup> 

Received: 14 July 2020  
© Sociedade Brasileira de Física 2020

## Abstract

The influence of external harmonic forcing in nonlinear chaotic systems is a subject of active investigation, chiefly in low-dimensional dynamical systems, but fewer results are available for high-dimensional systems like plasmas. In this paper, we consider a theoretical model for a weakly ionized plasma, in which the following effects are taken into account: (i) ambipolar diffusion; (ii) the inflow of plasma particles through ionization processes; (iii) the outflow of plasma particles due to recombination. The spatiotemporal patterns of the resulting nonlinear system, as revealed by numerical integration of the reaction-diffusion partial differential equations, can be partially or totally suppressed through the action of acoustic waves forming stationary patterns in the plasma container. These suppression effects are quantitatively investigated by a number of numerical diagnostics like the average Lyapunov exponents and spatial correlation function. Suppression of spatiotemporal chaos can be achieved through adequate choices of amplitude and frequency of the applied waves.

**Keywords** Nonlinear reaction-diffusion equations · Weakly ionized plasmas · Fisher-KPP equation · Spatiotemporal chaos

## 1 Introduction

Chaos and turbulence are often seen as a great challenge in many situations of plasma physics interest [1, 2]. In fusion plasma physics, the existence of chaotic behavior often leads to turbulence [3, 4]. The combination of nonlinearity with other instability phenomena is a severe problem in the magnetic confinement of plasmas in fusion devices [2]. Generally, one has to distinguish between temporal low-dimensional chaos, related to oscillations, and spatiotemporal chaos, related to waves, also classified as weakly developed turbulence [5].

In the framework of nonlinear dynamical systems, several strategies have been developed to obtain active control over complex temporal or spatiotemporal behavior [5, 6]. Recent applications of control theory have been developed to control chaotic behavior [7, 8]. For example, small perturbations have been used to control chaotic oscillations of the current and plasma potential in plasma diodes [9].

Successful approaches in controlling chaos in low-dimensional systems have motivated the search of techniques for taming fully developed spatiotemporal chaos. As an example, continuous global control can be used to stabilize plasma turbulence due to weakly developed ionization waves [9, 10].

A system that presents a rich dynamics with spatiotemporal chaos is the reaction-diffusion equation in weakly ionized plasmas [11]. Depending on the parameter values, such systems can display spatiotemporal chaos. Particularly in technological plasmas, it is of great interest to understand the physics of control or suppression of turbulence in this system [12]. The reaction-diffusion model used in this paper is characterized by the simultaneous presence of a diffusion and a nonlinear reaction term, where the diffusion term leads to configurations where density gradients are smoothed out [13].

Reaction processes, on the other hand, are nonlinear interaction processes like ionization and recombination, leading to positive and negative source terms. The competition of reaction and diffusion can lead to either simple, uniform, equilibrium configuration as well a complicated pattern formation, including the possibility of spatiotemporal chaos [14, 15]. The transition to spatiotemporal chaos in a weakly ionized magnetoplasma was experimentally investigated in

---

✉ R. L. Viana  
viana@fisica.ufpr.br

<sup>1</sup> Department of Physics, Federal University of Paraná, Curitiba, Paraná, 81531-990, Brazil



a cylindrical RF magnetron, showing a substantial reduction of spatiotemporal coherence with large RF power [16].

One of the various spatiotemporal patterns that are possible in nonlinear reaction-diffusion systems is the creation of spatially localized regions of chaotic behavior [17, 18]. In a recent work, it has been shown that, depending on the parameters of the reaction and diffusion, the plasma can present regimes where it has turbulent regions mixed with periodic regions, to regimes where the plasma has fully developed turbulence [19]. A discrete version of this model, yielding a coupled map lattice, has also been investigated leading to qualitatively similar behavior [20]. The goal of the present work is to understand the spatiotemporal dynamics that occurs when we apply an external perturbation in the form of a standing wave.

In the present work, we show that the injection of external electrostatic waves, forming stationary wave patterns in the plasma container, can exhibit different effects, being able to suppress or mitigate the space-time chaos, as to trigger this effect. A tool used to quantify the influence of the disturbance on the turbulent plasma regime is called the average Lyapunov exponent, developed by Shibata [21, 22] for the temporal dynamics of a spatially extended system. Using the spatial correlation function, we characterize the spatial profiles with fixed time for different amplitudes of the applied external wave [23]. The spatial correlation function is very useful in the characterization of spatiotemporal chaos in a spatially extended system [24].

The rest of this article is organized as follows: in Section 2, we derive the reaction-diffusion equation with a sinusoidal external perturbation that describes a bounded one-dimensional weakly ionized plasma with applied density waves. In this section, we also present spatiotemporal patterns obtained through numerical integration of the equation for nonlinear reaction-diffusion perturbation, for limited parameter ranges of interest in plasma physics. Section 3 deals with the average Lyapunov exponents used to characterize the chaoticity of the spatiotemporal profiles and how they are affected by the external wave perturbation. The spatial correlation function for different spatiotemporal profiles is dealt with in Section 4. The last section contains our conclusions.

## 2 Reaction-Diffusion with Stationary Wave Perturbation

In this section, we outline the theoretical model used to derive the reaction-diffusion equation which describes a non-magnetized weakly ionized plasma. Assuming the existence of ambipolar diffusion, the nonlinear

reaction-diffusion equation for a weakly ionized plasma can be written in the form

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - D \nabla^2 n(\mathbf{r}, t) = Q(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

where  $n = n_e$  is the electron density of the plasma (equal to the ion density  $n_i$  due to quasi-neutrality),  $D > 0$  is a constant diffusion coefficient, and  $Q(\mathbf{r}, t)$  is a source term.

The source term has both positive and negative contributions, representing production and loss terms, respectively [25]. The positive source term is represented by ionization [11] which is proportional to the product between electron density  $n_e = n$  and neutral atom density  $n_a$

$$Q^+ = \left( \frac{\partial n}{\partial t} \right)_{ion} \equiv an, \quad (2)$$

where  $a > 0$  is the ionization coefficient. Another type of source is known as recombination [11], which corresponds to a sink that acts as a loss term. Recombination occurs when a negative ion captures a free electron, the recombination rate being proportional to the product between electron and ion densities:

$$Q^- = \left( \frac{\partial n}{\partial t} \right)_{rec} \equiv -bn^2, \quad (3)$$

where  $b > 0$  is the recombination coefficient. We thus have two kinds of reaction processes: ionization, which acts as a source, and recombination, which acts as a sink, the nonlinear reaction term being written as

$$Q(n) = Q^+ + Q^- = an - bn^2. \quad (4)$$

After substitution into (1), we have a nonlinear reaction-diffusion equation

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D \nabla^2 n = n(a - bn). \quad (5)$$

Let us consider a one-dimensional version of the reaction-diffusion equation (5), where the plasma is confined by metallic (perfectly conducting) walls at  $x = 0$  and  $x = \ell$ , respectively, corresponding to the boundary conditions

$$n(x = 0, t) = n(x = \ell, t) = 0. \quad (6)$$

Moreover, we have to specify the initial condition, which is a given spatial pattern  $n(x, t = 0)$ .

If we neglect the diffusion coefficient in (5), the resulting differential equation has an elementary solution, namely

$$n(D = 0, t) = \frac{aC}{e^{-at} + bC}, \quad (7)$$

where the integration constant is expressed in terms of the initial condition  $n(t = 0)$

$$C = \frac{n(t = 0)}{a - b n(t = 0)}, \quad (8)$$

and such that, if  $a > 0$ , for large times the density tends to the stationary value  $n_0 = a/b$ .

Considering also a characteristic time  $t_0$ , we can define normalized variables as  $u = n/n_0$ ,  $\rho = x/\ell$ ,  $\tau = t/t_0$ , in such a way that the reaction-diffusion equation now reads

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \alpha u(1 - u), \quad (9)$$

where the number of system parameters has been reduced from three to just two, namely

$$\varepsilon \equiv \frac{Dt_0}{\ell^2}, \quad \alpha \equiv at_0, \quad (10)$$

representing the coupling constant due to diffusion and the overall nonlinearity parameter due to reaction processes, respectively. The expression (9) is the so-called Fisher-KPP equation, with many physical and biological applications [19].

We model the influence of an external density disturbance on a non-magnetized weakly ionized plasma, and we consider an ion-acoustic wave injected into the plasma. Due to the bounding metallic walls, after a short time, we expect the presence of stationary wave patterns. For simplicity, we consider a single resonant mode, with nodes at the walls ( $\rho = 0$  and  $\rho = 1$ ) and at the center point  $\rho = 0.5$ . This

adds a new term on the right side of the reaction-diffusion equation (9) such that it can be written in the form:

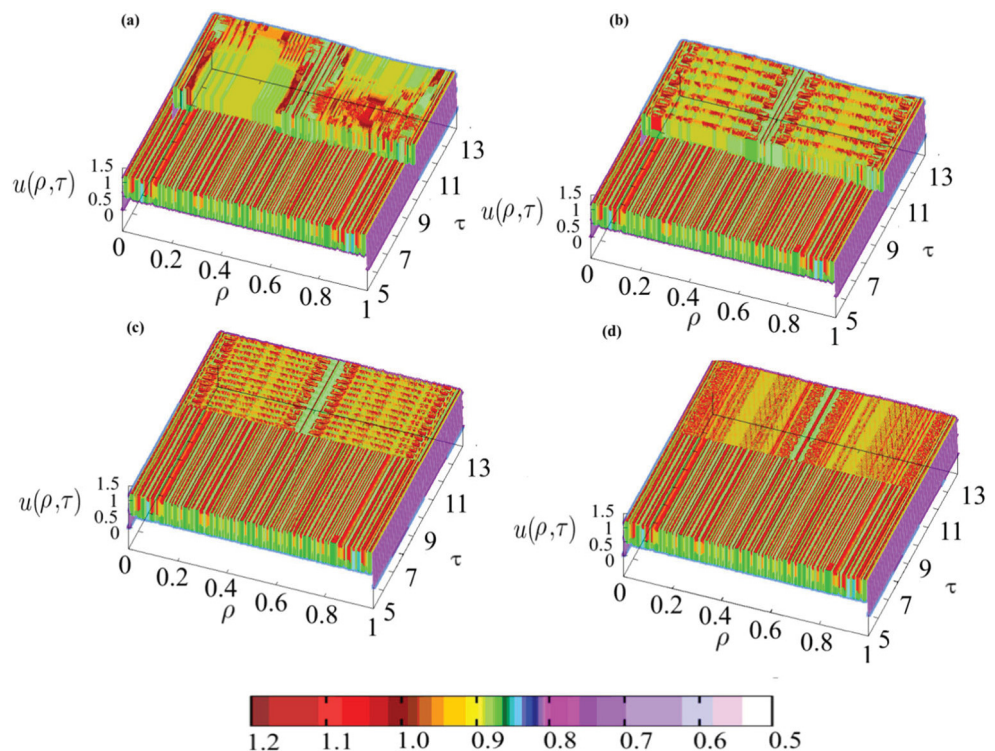
$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \alpha u(1 - u) + u_0 \sin(2\pi\rho) \sin(\omega\tau), \quad (11)$$

where  $u_0$  and  $\omega$  are the amplitude and frequency of the stationary wave, respectively.

The resulting partial differential equation with external perturbation given by (11) was solved, with boundary conditions (6) using an implicit finite difference scheme. The time and space steps used in the integration were chosen as  $\Delta\tau = 10^{-4}$  and  $\Delta\rho = 5 \times 10^{-3}$ , respectively. The initial profile was specified as  $u(\rho, 0) = \sin(2\pi\rho)$ . Since the system is globally dissipative, and we have discarded a large number of transient times, the spatial patterns observed were found not to depend on the initial conditions used. On the other hand, the fixed boundary conditions used in our numerical simulations affect in a very important way the spatiotemporal dynamics.

Initially we show numerical results illustrating the effect of waves of different frequencies on a plasma with spatiotemporal chaotic dynamics (a regime called *frozen random pattern*, [19]), that can be found for a coupling coefficient  $\varepsilon = 0.01$ , and a nonlinearity parameter  $\alpha = 2.6 \times 10^4$ , for example. The frozen random pattern has, as main characteristics, a large number of small domains with low temporal periods mixed with equally small regions with chaotic motion. These patterns are “frozen” in the sense that their boundaries do not move with time. Figure 1a–d are

**Fig. 1** Space-time plots of the normalized plasma density (in colorscale) for  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 2.60 \times 10^4$ , where an external wave perturbation of amplitude  $u_0 = 0.04$  is applied at  $\tau = 10$  with different frequencies:  $\omega =$  (a) 1, (b) 10, (c) 20, and (d) 100



space-time plots of the normalized density before and after the application (at time  $\tau = 10$ ) of a stationary wave of fixed amplitude  $u_0 = 0.04$  and different frequencies  $\omega$ .

For all cases depicted in Fig. 1, we observe a breakdown of the frozen random patterns after the wave is switched on, and the plasma is forced to oscillate at the same spatial mode as the external wave, with a node at the center point  $\rho = 0.5$ . For small frequency, the patterns are almost as irregular as before (Fig. 1a) but, as  $\omega$  increases, the plasma density exhibits oscillations with roughly the same frequency as the external wave, in an example of entrainment (Fig. 1b–d).

Another example of the effect of an external stationary wave is illustrated in Fig. 2, where we have a spatiotemporal pattern with chaotic defects, before the perturbation is switched on. Chaotic defects are spatially localized chaotic regions and bounded by regions of low temporal periods known as *zigzag* domains. These defects move along the lattice in a Brownian motion with memory [19, 20].

After the application of the stationary wave at  $\tau = 10$ , with low frequency, we observe that the chaotic defect does not disappear but is spatially displaced or reappears after a transient (Fig. 2a). For higher frequencies, however, the chaotic defects disappear and are replaced by oscillations nearly resonant with the external forcing (Fig. 2b–d).

A third example is provided by Fig. 3a–d, where the dynamical regime before the perturbation is switched on can be classified as spatiotemporal intermittency pattern, for which there is an intermittent transition between chaotic and

regular oscillations. After the perturbing wave is applied, the plasma response follows the same spatial pattern of the wave, with oscillations entrained to the external perturbation. Moreover, we observe an overall decrease in the turbulent density oscillations, since the density tends to concentrate on the wave maxima.

### 3 Average Lyapunov Exponent

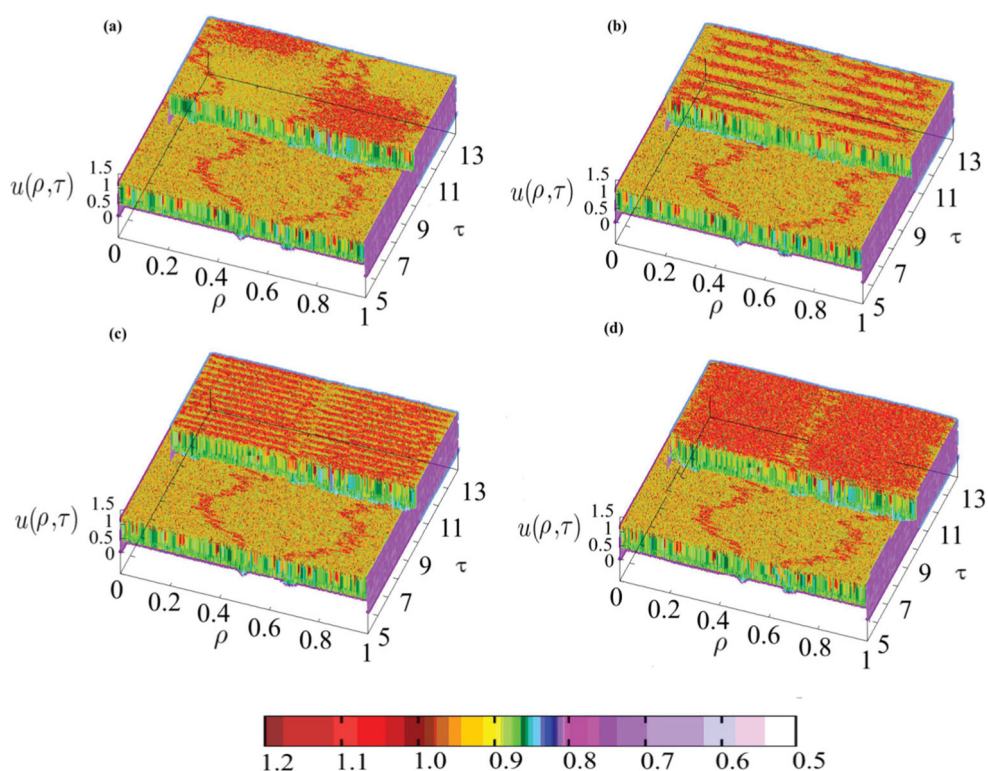
Some of the conclusions we obtained in the previous section were essentially qualitative and based on a superficial inspection of the space-time plots. A proper characterization of the degree of suppression of chaotic behavior, in both space and time, would need suitable numerical diagnostics.

One of these diagnostics is the average Lyapunov spectrum for the partial differential equation (11), obtained through the application of a method proposed by Shibata [21, 22]. From the numerical integration scheme, we transform (11) into a finite difference equation in the form

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta\tau} = h(\Delta\rho, \{u_j^k\}), \quad (12)$$

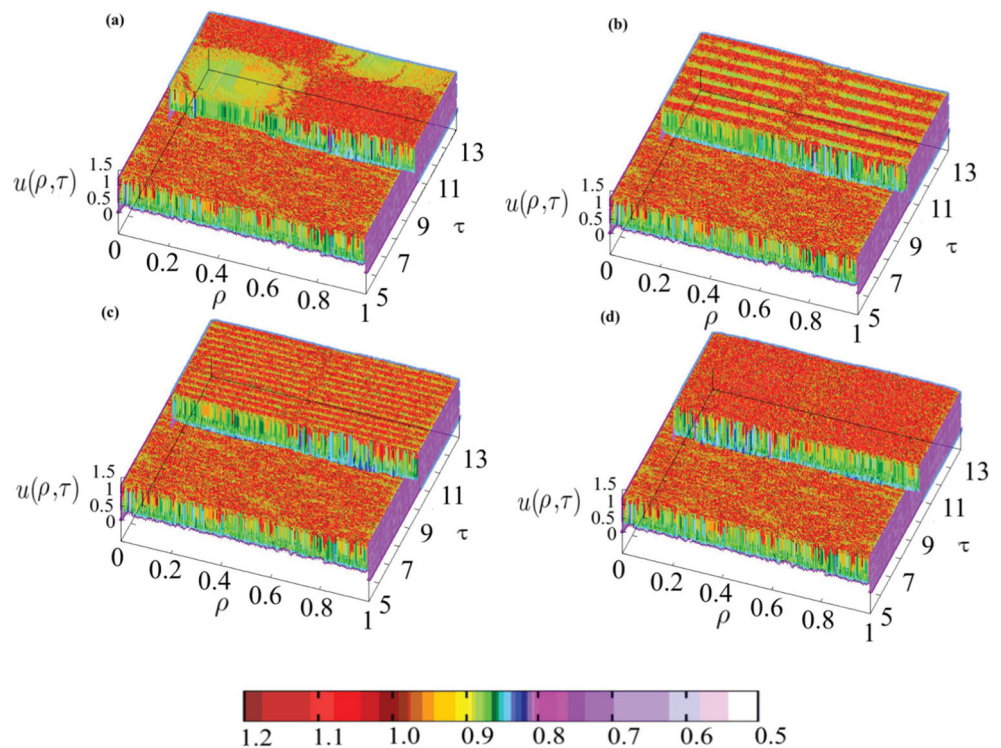
where  $\Delta\tau$  and  $\Delta\rho$  are the time and space steps, respectively, and  $(k, j)$  denote the discrete time and position, such that  $u_j^k = u(\rho = j\Delta\rho, \tau = k\Delta\tau)$ , where  $k, j = 1, 2, \dots, N -$

**Fig. 2** Space-time plots of the normalized plasma density (in colorscale) for  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 2.8202 \times 10^4$ , where an external wave perturbation of amplitude  $u_0 = 0.04$  is applied at  $\tau = 10$  with different frequencies:  $\omega =$  (a) 1, (b) 10, (c) 20, and (d) 100





**Fig. 3** Space-time plots of the normalized plasma density (in colorscale) for  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 2.83 \times 10^4$ , where an external wave perturbation of amplitude  $u_0 = 0.04$  is applied at  $\tau = 10$  with different frequencies:  $\omega =$  (a) 1, (b) 10, (c) 20, and (d) 100



1. The corresponding Jacobian matrix at time  $k\Delta\tau$  has elements

$$B_{ij}^{k,N} = \frac{\partial u_i^{k+1}}{\partial u_j^k}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, N-1). \quad (13)$$

According to Shibata, the average Lyapunov exponent at discrete time  $k$  is defined by

$$\lambda_k = \frac{1}{N} \ln |\det B^{k,N}|. \quad (14)$$

The reasoning behind this definition is that the determinant of the Jacobian matrix (13) can be interpreted as representing the disorderness of the state variable  $u$  at discrete time  $k$  [22]. Hence, the average Lyapunov exponent (14) represents the mean degree of this disorderness over the lattice, yielding a larger value when the spatial disorder is higher. However, as the dynamical system evolves with time, the degree of disorderness represented by  $\lambda_k$  varies with time, in such a way that it is better to work with the temporal mean of the average Lyapunov exponent

$$\Lambda = \frac{1}{n_k} \sum_{k=1}^{n_k-1} \lambda_k, \quad (15)$$

where  $n_k$  is a large integer, chosen after transients have decayed.

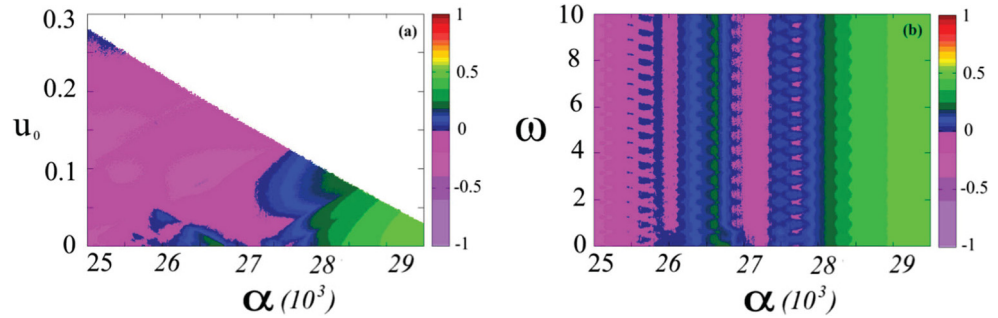
It must be emphasized that these averaged Lyapunov exponents are different from those usually computed in phase space, and which measure the exponential rate of separation between two initially close trajectories. As

defined by Shibata, the average exponent must be taken as a local measure of disorder, and do not correspond to exponential separation rates. However, the general interpretation is basically the same: positive values of  $\Lambda$  indicate spatial disorder, whereas negative values are related to ordered patterns.

We plot in Fig. 4a–b the values of  $\Lambda$  (in colorscale) as a function of different pairs of parameters. The regions for which the exponent diverges to minus infinity are painted white. In the absence of external perturbation ( $u_0 = 0$ ), the exponent varies from negative to positive according to the degree of disorder (i.e., increasing  $\alpha$ ). In fact, the examples depicted in Figs. 1, 2, and 3 correspond to different regions of spatiotemporal behavior along this line: frozen random patterns, chaotic defects, and spatiotemporal intermittency, with an increasing degree of disorder.

As the perturbation is switched on, we have substantial modifications in this profile. As  $u_0$  increases, the value of  $\Lambda$  achieves minus infinity (white regions in Fig. 4a) indicating that the wave perturbation has been able to effectively suppress the spatiotemporal chaos, yielding more ordered patterns. In fact, Figs. 1, 2, and 3 show that the spatiotemporal patterns become entrained with the external perturbation, oscillating with the wave frequency. It is worth noting that the critical values of  $u_0$ , above which the value of  $\Lambda$  goes to minus infinity, lay on a straight line with negative slope. In Fig. 4b, the value of  $\Lambda$  is plotted against the wave frequency  $\omega$  and the nonlinearity  $\alpha$ . Here we observe that the effect of increasing frequency is only noticeable for

**Fig. 4** Average Lyapunov exponent (in colorscale) as a function of the pair of parameters: **(a)** wave amplitude  $u_0$  and nonlinearity  $\alpha$  for fixed wave frequency  $\omega = 10$ ; **(b)** wave frequency  $\omega$  and nonlinearity  $\alpha$  for fixed wave amplitude  $u_0 = 0.04$



small values of  $\omega$ , a fact already seen in the space-time plots of Figs. 1, 2, and 3.

The effect of different wave amplitudes and frequencies for increasing nonlinearity can be also seen in Fig. 5, where we plot the average Lyapunov exponent  $\Lambda$  as a function of the wave frequency  $\omega$  for three different amplitudes  $u_0 = 0.02, 0.04$ , and  $0.08$ ; and different values of the nonlinearity parameter. In Fig. 5a obtained for  $\alpha = 2.60 \times 10^4$  and  $\varepsilon = 0.01$  (for which the unforced system displays frozen random patterns), we see  $\Lambda$  is practically independent on the wave frequency, but there is a decrease of the average Lyapunov exponent as we increase the amplitude of the perturbation. In other words, there is a decrease in the of spatiotemporal chaos in the plasma, as we switch on the wave perturbation.

Figure 5b, for  $\alpha = 2.8205 \times 10^4$  and  $\varepsilon = 0.01$ , which shows chaotic defects in the absence of wave perturbation, displays an increase of  $\Lambda$  with  $\omega$ , and a decrease of  $\Lambda$  with  $u_0$ , as in the previous case. Hence, the effect of wave frequency is more pronounced on the dynamics of chaotic defects. The same features are shown in Fig. 5c for  $\alpha = 2.8300 \times 10^4$  and  $\varepsilon = 0.01$  (the unperturbed system exhibits spatiotemporal intermittency).

## 4 Spatial Correlation Function

Another quantitative index that we can use to characterize spatiotemporal patterns and the influence of the wave

perturbation is the so-called spatial correlation function, which has been used to investigate many dynamical effects in spatially extended systems. For a fixed time  $\tau = k\Delta\tau$ , the spatial average of the normalized density for the system is

$$\langle u \rangle(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u(\rho = j\Delta\rho, \tau), \quad (16)$$

and the corresponding deviation from this average is

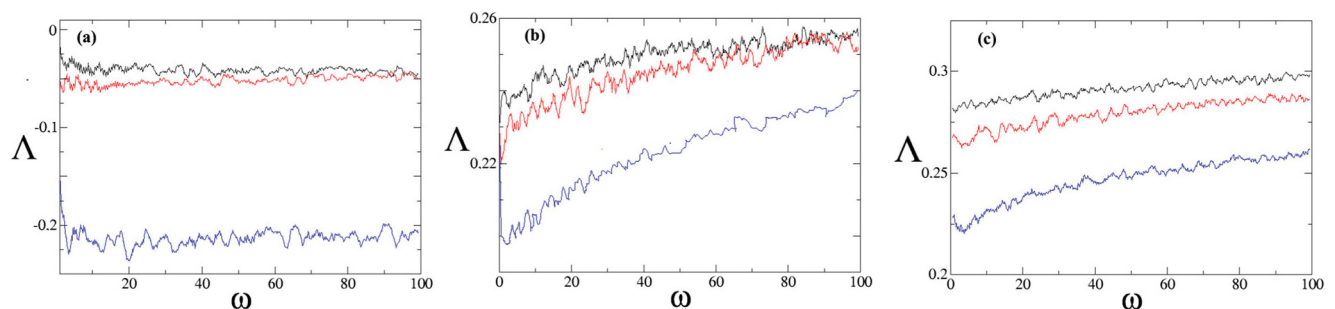
$$\hat{u}(\rho = i\Delta\rho, \tau) = u(\rho = i\Delta\rho, \tau) - \langle u \rangle(\tau). \quad (17)$$

We define the spatial correlation function, which characterizes the correlation between the different individual lattice sites, as [24]

$$C(\rho = j\Delta\rho, \tau) = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{u}(\rho = i\Delta\rho, \tau) \hat{u}(\rho = (i+j)\Delta\rho, \tau)}{\sum_{i=1}^N \{\hat{u}(\rho = i\Delta\rho, \tau)\}^2} \quad (18)$$

The definition above is similar to the time correlation function of a time series, the difference is that we consider spatial averages instead of time averages, and the values considered in (18) are taken at a fixed time.

We show in Fig. 6 the dependence of the spatial correlation on the spatial separation  $j\Delta\rho$  along the lattice, for three different spatiotemporal profiles with and without perturbation. For all cases, we take a fixed time  $\tau = 10$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\omega = 10$  and different values of  $\alpha$  and  $u_0$ . In



**Fig. 5** Average Lyapunov exponent  $\Lambda$  versus wave frequency  $\omega$  for  $u_0 = 0.02$  (black curves),  $u_0 = 0.04$  (red curves), and  $u_0 = 0.08$  (blue curves) for  $\varepsilon = 0.01$  and  $\alpha = 2.60 \times 10^4$  (a),  $2.8205 \times 10^4$  (b), and  $2.83 \times 10^4$  (c)

**Fig. 6** Spatial correlation function as a function of the lattice separation at a fixed time  $\tau = 10$ , for  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\omega = 10$ , and: (a)  $\alpha = 2.60 \times 10^3$ , (b)  $2.70 \times 10^3$  and (c)  $2.82 \times 10^3$ . The wave amplitudes are  $u_0 = 0$  (red curve), 0.04 (blue curve), and 0.08 (green curve)

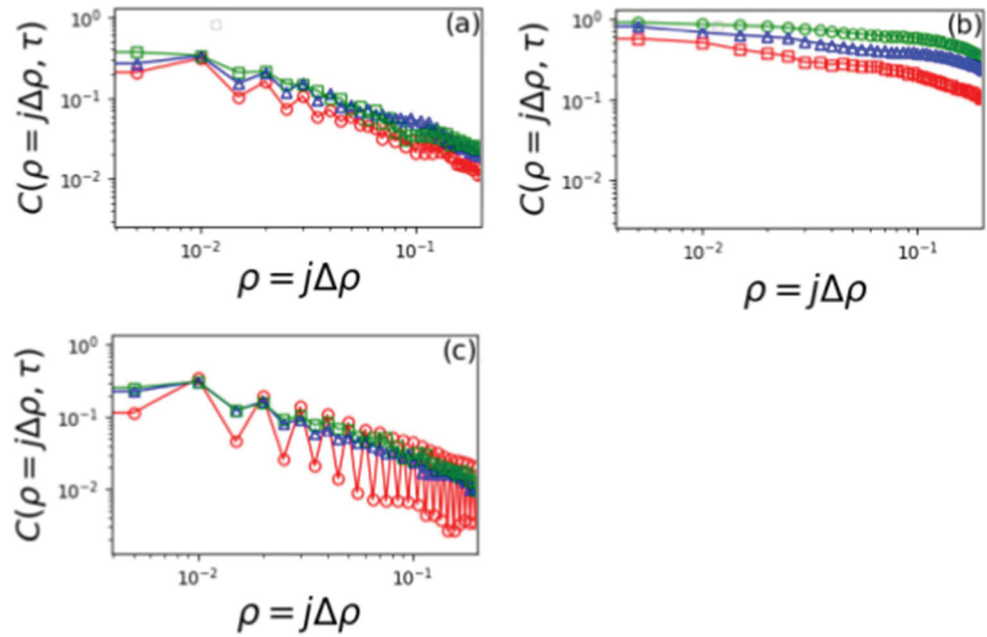


Fig. 6a, we consider  $\alpha = 2.60 \times 10^4$ , for which there is a frozen random pattern without perturbation (red curve). The data are well-adjusted by a power law in the form

$$C(\rho = j\Delta\rho, \tau) = C_0(j\Delta\rho)^{-\gamma} \quad (19)$$

where the decay exponent is  $\gamma = 0.0575$  (Table 1), with regression coefficient  $R^2 = 0.9294$ . The closer the latter is to the unity, the more representative the regression.

After the application of an external wave with amplitudes  $u_0 = 0.04$  (blue curve), the spatial correlation also decays as a power law with exponent 0.053, which is slightly less than for the unperturbed case. Increasing the wave amplitude to 0.08 (green curve), however, the decay exponent decreases to 0.039, indicating a slower decay and a diminishing

disorder in the spatiotemporal profile with respect to the amplitude of the applied wave.

The same observations can be made for the case depicted in Fig. 6b, where  $\alpha = 2.70 \times 10^4$ . The unperturbed case (red curve) corresponds to a pattern selection, and the power-law decay occurs with a smaller exponent, namely 0.046. The application of the external wave (blue and green curves) yields a slower power-law decay, also suggesting a decrease of the spatial disorder caused by the wave.

A similar behavior can also be identified in Fig. 6c, where  $\alpha = 2.82 \times 10^4$ , corresponding to chaotic defects when unperturbed. The novel feature here is that there is an oscillating behavior of the spatial correlation function for the unperturbed case. This can be due to the existence of zigzag patterns in both sides of a chaotic defect, as observed in coupled map lattices. The decay becomes more regular, however, as the wave perturbation is switched on, with a slightly smaller decay exponent reflecting a relatively mild effect of the external wave.

There are some arguments that can be used to justify the conclusions drawn upon the decay of the spatial correlation function. We start from the assumption that spatial correlations (at fixed time) are for spatial profiles as the time correlations (at fixed position) are for time series. The latter have been extensively studied in the context of nonlinear dynamics.

For hyperbolic chaotic systems, it is known that time-correlations decay exponentially in time [26]. For chaotic orbits of area-preserving non-hyperbolic systems, it has been shown that time correlations decay as a power law due to the presence of stickiness [27]. The latter is a kind of

**Table 1** Values of the coefficients of the power-law fitting (19) for the decay of the spatial correlation functions depicted in Fig. 6

$\alpha/10^4$	$u_0$	$C_0$	$\gamma$	$R^2$
2.60	0.00	1.057	0.0575	0.9294
2.60	0.04	1.053	0.0531	0.9542
2.60	0.08	1.042	0.0393	0.9623
2.70	0.00	1.653	0.0459	0.9346
2.70	0.04	1.271	0.0229	0.9531
2.70	0.08	1.095	0.0931	0.9345
2.82	0.00	1.047	0.0438	0.9294
2.82	0.04	1.044	0.0399	0.9532
2.82	0.08	1.034	0.0336	0.9492

behavior caused by stretches of almost-periodic behavior in a chaotic orbit near enough a periodic island [28].

Using the abovementioned analogy, if a spatial profile is highly disordered, it would be reasonable to speculate that spatial correlations also would decay exponentially. However, since the spatial disorder is not completely chaotic in spatiotemporal patterns, we expect a power-law decay of spatial correlations, which holds for the cases depicted in Fig. 6. From the analogy with the temporal case, the more spatially ORDERED is the pattern, the slower will BE the spatial correlation decay, and that is what we see after the application of the external wave.

## 5 Conclusions

Reaction-diffusion systems have many applications in fusion, astrophysical, and technological plasmas, and they provide simple yet efficient mathematical models for the description of many spatiotemporal phenomena. There is a rich variety of dynamic pattern formations depending on the parameters used, such as regimes containing chaotic and regular regions to regimes with fully developed space-time chaos, for example. We observed that the application of an external wave drives the plasma to oscillate at the same frequency as the applied wave. There is also a decrease in the space-time chaos, as we increase the amplitude of the applied wave, that is, the external wave acts to decrease these chaotic regions. These conclusions were obtained from an average Lyapunov exponent.

Another analysis that confirms this decrease in spatial disorder was performed using spatial correlation, where we observed a decrease in the correlation decay as a function of the wave amplitude. The cases we studied show a power-law decrease, what can be justified from an analogy with time correlations. The power-law decay becomes slower after the application of the wave perturbation, indicating a decrease of the spatial disorder.

One shortcoming of our theoretical model is that we considered just one species of particles in the plasma (free electrons) and is thus of limited application since we did not describe self-consistently the dynamics of the positive ions and neutral atoms. It is conceptually possible to extend the present analysis to a full description of diffusion-reaction involving also ions and neutral atoms. However, our aim was to show that even a toy model like the present one is able to describe the formation of complex spatiotemporal patterns, in particular those involving temporal chaos and spatial disorder. Moreover, the pure electron model can also explain

the decrease of spatial disorder through the application of stationary wave perturbations.

**Funding** This work has the partial financial support of CNPq (proc. 301019/2019-3).

## References

1. Y. Elskens, D. Escande, *Microscopic Dynamics of Plasmas and Chaos* (Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2003)
2. W. Horton, Y.H. Ichikawa (eds.), *Chaos and Structures in Nonlinear Plasmas* (World Scientific, Singapore, 1996)
3. T.S. Hahmand, K.H. Burrell, *Phys. Plasmas* **2**, 1648 (1995)
4. G.D. Conway, *Plas. Phys. Contr. Fusion* **40**, 124026 (2008)
5. P. Manneville, *Dissipative Structures and Weak Turbulence* (Academic Press, San Diego, 1990)
6. H. Pécseli, *Fluctuations in Physical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000)
7. T. Kapitaniak, *Controlling Chaos* (Academic Press, New York, 1996)
8. H.G. Schuster, *Handbook of Chaos Control* (Wiley-VCH, Weinheim, 1999)
9. T. Klinger, C. Schröder, D. Block, F. Greiner, A. Piel, G. Bonhomme, V. Naulin, *Phys. Plasmas* **8**, 1961 (2001)
10. C. Schröder, T. Klinger, D. Block, A. Piel, G. Bonhomme, V. Naulin, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 25 (2001)
11. H. Wilhelmsson, E. Lazzaro, *Reaction-Diffusion Problems in the Physics of Hot Plasmas* (IOP Publishing, Bristol, 2001)
12. M.A. Lieberman, A.J. Lichtenberg, *Principles of Plasma Discharges and Materials Processing* (Wiley, New York, 2005)
13. W.B. Thompson, Introduction to kinetic theory of plasma. in *Physics of Hot Plasmas*, ed. by B.J. Rye, J.C. Taylor (Oliver and Boyd, Edinburgh, 1970)
14. P.O.J. Scherer, S.F. Fischer, *Reaction-Diffusion Systems*: Springer, Berlin-Heidelberg (2017)
15. I.R. Epstein, I.B. Berenstein, M. Dolnik, V.K. Vanac, L. Yang, A.M. Zhabotinsky, *Phil. Trans. R. Soc. A* **366**, 397 (2008)
16. J.H. Chu, I. Lin, *Phys. Rev. A* **39**, 233 (1989)
17. V.K. Vanag, I.R. Epstein, *Chaos* **17**, 037110 (2007)
18. K. Kaneko, *Physica D* **34**, 1 (1989)
19. S.T. da Silva, T. de L. Prado, I.L. Caldas, S.R. Lopes, R.L. Viana, *CNSNS*, submitted for publication
20. S.T. da Silva, T.L. Prado, S.R. Lopes, R.L. Viana, *Chaos* **071104**, 29 (2019)
21. H. Shibata, *Physica A* **264**, 226 (1999)
22. H. Shibata, *Physica A* **252**, 428 (1998)
23. J.M. Houlrik, M.H. Jensen, *Phys. Lett. A* **163**, 275 (1992)
24. D.B. Vasconcelos, R.L. Viana, S.R. Lopes, *Physica A* **343**, 201 (2004)
25. A. Fridman, L.A. Kennedy, *Plasma Physics and Engineering*, 2nd edn. (CRC Press, Boca Raton, 2011)
26. H. Fujisaka, T. Yamada, *Z. Naturforsch* **33(a)**, 1455 (1978)
27. C.F.F. Karney, *Physica D* **8**, 360 (1983)
28. G. Contopoulos, M. Harsoula, *Int. J. Bifurcat. Chaos* **18**, 2929–2949 (2008)

**Publisher's Note** Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.